Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателя предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном очень трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Помимо самого решения трудных задач, в высшей степени полезно упражняться в изложении решений. Мы советуем всем, решившим какую-либо из задач, попробовать записать ее решение в максимально простом и понятном виде и прислать в редакцию. В последующих номерах мы опубликуем самые изящные из полученных решений.

К сожалению, нам известны авторы далеко не всех предлагаемых ниже задач. Многие из них известны десятилетия и стали частью «математического фольклора». Одна из целей, преследуемых составителями данного раздела, — записать этот «фольклор», многие части которого стремительно исчезают в наше время.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем.

Сообщим ту информацию об авторах задач, которой располагаем (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи неизвестен, мы указываем того, кто предложил эту задачу.

Задачи 1, 3 предложил А. Канель-Белов, он же автор задач 2, 6б), 9. Задача 6а) принадлежит В. А. Сендерову, он же предложил задачу 10. Задачу 4 придумал С. Маркелов, задача 5 — совместное изобретение А. Канеля, А. Белова и А. Ковальджи. Задачу 7 придумал В. М. Тихомиров. Задачу 8 предложил А. Г. Кулаков.

Условия задач

1*. ШАХМАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Могут ли 1000 ладей в пространстве заматовать короля?

2*. КОНЕЦ ЧИСЛА

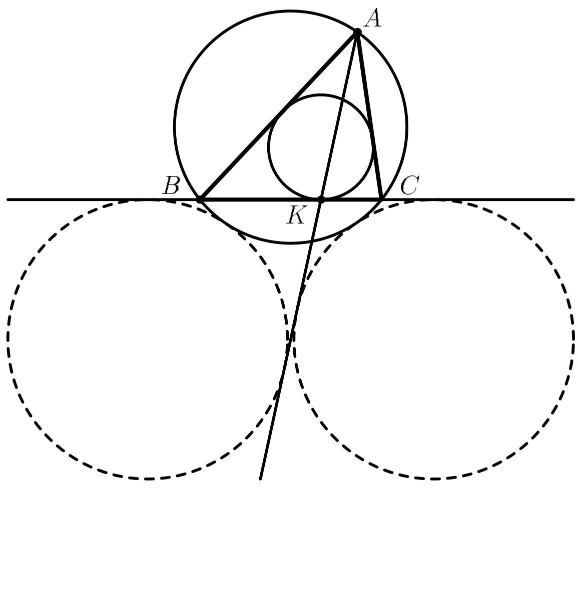
Доказать, что существует бесконечно много N таких, что 2^N оканчивается на N.

3. СИНУСЫ

Может ли сумма чисел вида $a\sin(k\pi/n)$, где a — рациональное число, k, n — целые, равняться $\sqrt{1997}$?

4. ВСЕГО ЛИШЬ ПЛАНИМЕТРИЯ

Дан треугольник ABC. K — точка касания вписанной в него окружности и стороны BC. Рассмотрим две окружности, касающиеся прямой BC, луча AK и окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$ (на рисунке изображены пунктиром). Доказать, что их радиусы равны.



5. РАЗРЕЗАНИЕ

Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

6. МНОГОЧЛЕН

а) дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0$: $P(X) > 0$. Доказать, что что $P = Q/T$, где Q и T — многочлены с неотрицательными коэффициентами.

б)* пусть P — квадратный трехчлен, α — аргумент его комплексного корня. Тогда степень Q не меньше $2\pi/\alpha$.

7. ИНТЕГРАЛ

Пусть функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; 1]$,

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2\, dt \leqslant 1.$$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, через которые может проходить график функции $y = f(x)$.

8. СЕМЕЙСТВА ПОДМНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

а) Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчетным, если для любых двух подмножеств из этого семейства одно строго содержится в другом?

б) Тот же вопрос, если пересечение любых двух множеств в семействе конечно.

9. РЯД

Известно, что при любых действительных A, B ряд $\sum \dfrac{1}{|Ax_n + By_n|}$ расходится. Обязан ли расходиться ряд $\sum \dfrac{1}{|x_n| + |y_n|}$? А что если A и B могут быть комплексными?

10. МНОГОЧЛЕН

Функция, заданная на всей вещественной прямой, бесконечно дифференцируема. В каждой точке некоторая производная (номер производной может зависеть от точки) равна нулю. Докажите, что эта функция — многочлен.