Примеры трансцендентных чисел

А. Каибханов А. Скопенков*

Wenn Sie unterrichten und davon ausgehen, dass sich parallele Linien im Unendlichen berühren, ergibt sich doch, das müssen Sie zugeben, so etwas wie Transzendenz.

G. Grass, *Katz und Maus*

Если Вы учите, что параллельные линии пересекаются в бесконечности, то Вы всё же должны согласиться: получается нечто непостижимое.

Г. Грасс, *Кошка и мышка*

Приводится простое доказательство трансцендентности числа Лиувилля и новое простое доказательство трансцендентности числа Малера.

Введение

Число x называется *трансцендентным*, если оно не является корнем алгебраического уравнения

$$a_t\lambda^t + a_{t-1}\lambda^{t-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами $a_t \neq 0,\ a_{t-1}, \ldots, a_0$.

В университете или даже в старших классах изучается теоретико-множественное доказательство существования трансцендентных чисел [2, Гл. 2, §6]. Это доказательство не дает конкретного примера трансцендентного числа. Приведение *явных* примеров трансцендентных чисел и доказательство их трансцендентности является более трудным материалом, который не всегда входит даже в программу университетского

*А. Скопенков поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, гранты номер 05-01-00993 и 04-01-00682, грантами Президента РФ НШ-1988.2003.1 и МД-3938.2005.1, а также стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года.

курса. В данной заметке мы приведем такие примеры и доказательства их трансцендентности, которые будут понятны даже старшеклассникам.

Этот абзац предназначен читателям, не знакомым с трансцендентными числами. Ясно, что любое рациональное число не является трансцендентным. Число y называется *алгебраическим*, если оно не трансцендентно. Поэтому алгебраические числа — нечто промежуточное между рациональными числами и произвольными вещественными числами. Зачем нужно доказывать трансцендентность чисел? Одной из мотивировок является то, что всякое *построимое* число (т. е. число, которое может быть построено с помощью циркуля и линейки) является алгебраическим. Таким образом, любое трансцендентное число не построимо [2, Гл. 2, §6 и Гл. 3, §3].

Первый явный пример трансцендентного числа был приведен Жозефом Лиувиллем в 1835 г. [2, Гл. 2, §6].

Теорема Лиувилля. *Число* $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$ *трансцендентно.*

Лиувилль доказал также более общий результат. Приводимая ниже формулировка общей теоремы Лиувилля используется в настоящем тексте *только* для мотивировки нижеследующей теоремы Малера.

Общая теорема Лиувилля. *Пусть z — алгебраическое число, являющееся корнем многочлена степени $n > 1$. Тогда z не может быть приближено рациональным числом $\frac{p}{q}$ с точностью лучшей, чем $\frac{1}{q^{n+1}}$; другими словами, при достаточно больших целых q непременно выполняется неравенство* $\left|z - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{n+1}}$. [2, Гл. 2, §6].

В 1929 г. Курт Малер доказал трансцендентность следующего числа [4].

Теорема Малера. *Число* $\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$ *трансцендентно.*

Трансцендентность этого *числа Малера* не следует из общей теоремы Лиувилля, а также из теорем Туэ, Зигеля и Рота [2, Гл. 2, §6], [3]. В работе [4] был получен более общий результат. Доказательство в [4] (так же как и в [5]) неэлементарно и длинно (ср. [1]).

Главный результат данной заметки — *короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Малера* (основанное на двоичной записи). Видимо, это доказательство является новым. Оно представлено в разделе «Доказательство теоремы Малера» и не использует остальной части заметки. Но для удобства читателей мы представляем некоторые идеи этого доказательства в разделах «Идея простого доказательства теоремы Малера» и «Основное наблюдение для доказательства теоремы

Малера». Наши идеи дают более общий результат, который приводится в последнем разделе.

Мы также приведем короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Лиувилля. Это доказательство представлено в следующем разделе и хорошо известно специалистам, однако мы не нашли его в опубликованном виде.

Данная заметка была представлена в 2002 г. А. Каибхановым на международной конференции Intel ISEF (США, Луисвилль), а также И. Никокошевым и А. Скопенковым на Летней Конференции Турнира Городов (Россия, Белорецк). Мы выражаем благодарность А. Галочкину и Д. Лешко за полезные обсуждения.

Доказательство теоремы Лиувилля

Обозначим $\lambda_s = \sum\limits_{n=0}^{s} 2^{-n!}$.

Сначала докажем, что *число Лиувилля λ иррационально.* Предположим, напротив, что существует линейный многочлен $f(x) = bx + c$ с целыми коэффициентами $b \neq 0$ и c такой, что $f(\lambda) = 0$. Заметим, что это уравнение имеет только один корень, значит $f(\lambda_s) \neq 0$ для некоторого $s > |b|$. Мы получим противоречие из следующих неравенств для некоторого $s > |b|$:

$$2^{-s!} \leqslant |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = |b| \cdot (\lambda - \lambda_s) < 2|b| \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлено как дробь со знаменателем $2^{s!}$. Последнее неравенство верно, так как

$$0 < \lambda - \lambda_s < 2^{-(s+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Теперь докажем, что *число Лиувилля λ не является квадратичной иррациональностью*, т. е. не является корнем квадратного уравнения $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами $a \neq 0$, b и c. Предположим, напротив, что λ является корнем такого уравнения. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то $f(\lambda_s) \neq 0$ для достаточно больших s. Тогда для достаточно больших s мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-2s!} \leqslant |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = (\lambda - \lambda_s) \cdot |a(\lambda + \lambda_s) + b| < \\ < (2|a|\lambda + |b|) \cdot 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлено как дробь со знаменателем $2^{2s!}$. Последнее неравенство доказывается аналогично случаю линейного многочлена.

Наконец, приведем доказательство *трансцендентности числа Лиувилля* λ. Предположим, напротив, что число λ является корнем алгебраического уравнения $f(x) = a_t x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, \dots, a_{t-1}, a_t \neq 0$. Так как это уравнение имеет лишь конечное число корней, то $f(\lambda_s) \neq 0$ для достаточно больших s. Тогда для достаточно больших s мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-ts!} \leqslant |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = (\lambda - \lambda_s) \cdot \left| \sum_{0 \leqslant i < n \leqslant t} a_n \lambda^{n-1-i} \lambda_s^i \right| < C \cdot 2^{-(s+1)!},$$

где C не зависит от s (но зависит от коэффициентов многочлена f). Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлено как дробь со знаменателем $2^{ts!}$. Последнее неравенство доказывается аналогично случаю многочленов первой и второй степени. □

Идея простого доказательства теоремы Малера

Мы продемонстрируем идею доказательства на следующем примере. Мы докажем, что число Лиувилля

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0{,}11010001000000010\dots$$

не является *квадратичной иррациональностью*, т. е. корнем квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами b и c. (Аналогично доказывается, что число Малера μ не является квадратичной иррациональностью.) Рассмотрим десятичную запись числа $-b\nu - c$ для некоторых целых b и c одного знака (случай различных знаков доказывается аналогично). Рассмотрим ненулевые цифры в этой десятичной записи, расположенные достаточно далеко от запятой. Ясно, что они образуют «сгустки» около позиций с номерами 2^n: каждый «сгусток» представляет число $|b|$. Например для $b = -17$ мы имеем следующее:

$$17\nu - c = \dots{,}87170017000000170\dots017\dots.$$

С другой стороны,

$$\nu^2 = \sum_{k,l=0}^{\infty} 10^{-2^k - 2^l} = 0{,}0121220\dots122020002000000012\dots.$$

Таким образом, в десятичной записи числа ν^2 ненулевые цифры расположены около позиций с номерами $2^k + 2^l$. Но для достаточно больших l и $k = 2l$ на этих же позициях числа $-b\nu - c$ стоят нули. Следовательно $\nu^2 \neq -b\nu - c$. Значит, ν не является квадратичной иррациональностью.

Основное наблюдение для доказательства теоремы Малера

Мы продемонстрируем одну из наших главных идей на следующем примере. Мы докажем, что *число* $E = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$ *иррационально для любой ограниченной последовательности* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ненулевых целых чисел.* (Заметим, что $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.)

Предположим, напротив, что E рационально. Тогда существуют сколь угодно большие q, для которых

$$E = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{q} \frac{a_n}{n!} + \frac{a_{q+1}}{(q+1)!} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

Поэтому

$$p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!a_n}{n!} = \frac{a_{q+1}}{q+1} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!a_n}{n!}$$

целое число. Но это невозможно, так как для достаточно больших q имеем

$$\Bigg|\sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!a_n}{n!}\Bigg| \leqslant C \cdot \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} < C \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{C}{(q+1)q} < \frac{1}{q+1} \leqslant \left|\frac{a_{q+1}}{q+1}\right| < \frac{1}{2}.$$

□

Доказательство теоремы Малера

Возьмем многочлен $f(x) = a_t x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами $a_t \neq 0,\ a_{t-1}, \dots, a_0$. Выберем достаточно большое число p и положим $s = 2^p(2^t - 1) - 2^{p-1}$. (В двоичной записи $s = 1\dots1010\dots0$ с t единицами и p нулями). Достаточно доказать, что

дробная часть $\{2^s f(\mu)\}$ *не равна нулю.*

(Это число является «s-хвостом» десятичной записи числа $f(\mu)$: его двоичное разложение получено из двоичного разложения числа $f(\mu)$ отбрасыванием всех знаков слева от s-го знака после запятой.)

Раскрывая скобки, получим

$$\mu^q = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}\right)^q = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(q) 2^{-n},$$

где $d_n(q)$ есть количество упорядоченных представлений числа n в виде суммы q степеней двойки (не обязательно различных степеней). Другими словами, $d_n(q)$ является количеством упорядоченных наборов $(w_1, \dots, w_q)$ длины q таких, что $n = 2^{w_1} + \dots + 2^{w_q}$ (возможно $w_i = w_j$). Например, $d_3(2) = 2$, поскольку $3 = 2^0 + 2^1 = 2^1 + 2^0$ и $d_0(0) = 1$.

Имеем

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-n}, \quad \text{где} \quad d_n = a_t d_n(t) + a_{t-1} d_n(t-1) + \dots + a_0 d_n(0).$$

Ясно, что $d_n(q) = 0$ тогда и только тогда, когда n имеет более q единиц в двоичной записи. Обозначим через U_q множество чисел n, имеющих не более q единиц в двоичной записи. Тогда $d_n = 0$ для $n \notin U_q$.

Число $s_1 = 2^p(2^t - 1)$ — наименьшее число из U_t, большее, чем s (в двоичной записи $s_1 = 1\dots10\dots0$ с t единицами и p нулями). Число $s_2 = 2^{t+p}$ — наименьшее число из U_t, большее, чем s_1. Следовательно

$$\{2^s f(\mu)\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right\} = \left\{ d_{s_1} 2^{s-s_1} + \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right\}.$$

Тогда

$$\{2^s f(\mu)\} \neq 0, \quad \text{поскольку} \quad \left| \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right| \overset{(1)}{<} 2^{s-s_1} |d_{s_1}| \overset{(2)}{<} 1/2.$$

Для доказательства неравенств (1) и (2) нам понадобится следующая лемма, которую мы докажем позже.

Лемма о представлении. *Количество $d_n(q)$ упорядоченных представлений числа n в виде суммы q степеней двойки не превосходит $(q!)^2$.*

Из леммы о представлении получаем, что существует число $D = D(f)$ такое, что $|d_n| \leqslant D$ для каждого n. Следовательно неравенство (2) верно, так как $|d_{s_1}| 2^{s-s_1} \leqslant D \cdot 2^{-2^{p-1}} < 1/2$ для достаточно больших p. Неравенство (1) верно, так как для достаточно больших p (аналогично утверждению о $\lambda - \lambda_s$ для числа Лиувилля)

$$\left| \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right| \leqslant D \sum_{n=s_2}^{\infty} 2^{s-n} = D \cdot 2^{s+1-s_2} = D \cdot 2^{s-s_1+1-2^p} <$$

$$< 2^{s-s_1} \leqslant 2^{s-s_1} |d_{s_1}|.$$

Здесь последнее неравенство верно, так как $s_1 \in U_t - U_{t-1}$, и $d_{s_1}(q) = 0$ для $q < t$, следовательно $d_{s_1} = a_t d_{s_1}(t) \neq 0$. □

Доказательство леммы о представлении. Для $q = 0$ имеем $d_0(0) = 1 \leqslant 0!^2$. Для $q \geqslant 1$ имеем $d_n(q) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} d_{n-2^r}(q-1)$. Следовательно, при помощи индукции по q получаем, что достаточно доказать следующее утверждение:

для каждого $n \in U_q$ существует не более q^2 целых $r \geqslant 0$ таких, что $n - 2^r \in U_{q-1}$.

Рассмотрим двоичное представление числа $n \in U_q$:

$$n = 2^{w_k} + 2^{w_{k-1}} + \dots + 2^{w_1}, \quad \text{где} \quad w_k > w_{k-1} > \dots > w_1 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad k \leqslant q.$$

Обозначим $w_0 = -1$. Так как $n - 2^r < 0$ для $r > w_k$, то достаточно доказать, что

для каждого $i = 1, 2, ..., k$ *существует не более* q *целых* $r \in [w_{i-1} + 1, w_i]$ *таких, что* $n - 2^r \in U_{q-1}$.

Следовательно, достаточно доказать, что

для каждого $i = 1, 2, ..., k$ *и* $r \in [w_{i-1} + 1, w_i - q]$ *имеем* $n - 2^r \notin U_{q-1}$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что $2^{w_i} - 2^r = 2^{w_i - 1} + 2^{w_i - 2} \dots + 2^r$ есть сумма $w_i - r \geqslant q$ различных степеней двойки, каждая из которых больше $2^{w_{i-1}}$ и меньше $2^{w_i} < 2^{w_{i+1}}$. Поэтому число $n - 2^r$ представляется в виде суммы более чем $q - 1$ различных степеней двойки. Значит, $n - 2^r \notin U_{q-1}$. $\square$

Обобщение

Предположим, что дана строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел.

Пусть дано натуральное число q. Натуральное число m называется *q-представимым*, если m можно представить в виде суммы не более чем q членов последовательности $\{a_i\}$: $m = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_q}$. Эти члены не обязательно различны (например, число $m = a_2 + a_2$ является 2-представимым).

Последовательность $\{a_i\}$ называется *q-разреженной*, если для любого целого M существует три последовательных q-представимых числа a, b и c, промежутки между которыми больше M (т. е. таких, что $b - a > M$ и $c - b > M$).

Последовательность $\{a_i\}$ называется *разреженной*, если она q-разреженная для любого q.

Например, последовательность $a_i = i$ всех целых положительных чисел является 1-представимой, следовательно, эта последовательность не 1-разрежена и тем более не разрежена. При доказательстве теоремы Малера было доказано, что последовательность 2^i является разреженной.

Последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел называется *q-рыхлой*, если количество способов представления числа n в виде суммы q членов этой последовательности (не обязательно различных) не превосходит некоторой константы C_q, не зависящей от n (но, возможно, зависящей от q). Сформулируем это немного по-другому. Для любых натуральных q и n обозначим через $d_n(q)$ количество представлений числа n в виде суммы q (не обязательно различных) членов последовательности $\{a_i\}$ с учетом порядка. Другими словами, $d_n(q)$ — это количество упорядоченных наборов $(a_{i_1}, \dots, a_{i_q})$ с $n = a_{i_1} + \dots + a_{i_q}$. Последовательность $\{a_i\}$ называется *q-рыхлой*, если существует число C_q такое, что $d_n(q) < C_q$ при любом n.

Последовательность $\{a_i\}$ называется *рыхлой*, если она является q-рыхлой для любого натурального q.

Например последовательность $a_i = i$ не рыхлая и даже не 2-рыхлая. Действительно, натуральное число n имеет не менее $n/2-1$ представлений в виде суммы двух натуральных чисел, таким образом $d_n(2) \geqslant n/2 - 1$. Из леммы о представлении вытекает, что последовательность 2^i является рыхлой.

Аналогично приведённому доказательству теоремы Малера можно доказать следующий результат.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}$ рыхлая и разреженная, то число $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-a_n}$ трансцендентно.*

Было бы интересно обобщить наше доказательство трансцендентности числа Малера и приведённой теоремы до достаточного условия трансцендентности числа, включающего два «хороших» приближения этого числа.

Авторы не знают, являются ли следующие числа трансцендентными (или квадратичными иррациональностями):

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$ для любой ограниченной последовательности d_n целых положительных чисел.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$ для любой последовательности $0 \leqslant d_n \leqslant n$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2^n}$.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-2^n}$ для любой последовательности $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$.

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-[1{,}1^n]}$.

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-f_n}$, где $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = f_1 = 1$ — последовательность Фибоначчи.

Список литературы

[1] Галочкин А. *О мере трансцендентности значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям* // Мат. Заметки, 1980. Т. 27, №2. С. 175–183.

[2] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика*? М.: МЦНМО, 2001.

[3] Фельдман Н. *Алгебраические и трансцендентные числа* // Квант, №7, 1983. С. 2–7.

[4] Mahler K. *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen* // Mathematische Annalen, 1929. Bd. 1. S. 342–366.

[5] Nishioka K. *Mahler functions and transcendence.* Lecture Notes in Math., 1631. Berlin – New York, 1996.

А. Б. Скопенков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия; Независимый московский университет, Б. Власьевский пер., 11, Москва, 119002, Россия.
E-mail: `skopenko@mccme.ru`

А. Каибханов, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия.
E-mail: `kaib@mail.ru`