

## Формула для объема пересечения куба с полупространством

А. Я. Белов

В свое время я исследовал разбиение массива горных пород системами трещин. Каждая такая система моделировалась системой параллельных равноотстоящих плоскостей. Случай трех систем тривиален — получается разбиение пространства на равные параллелепипеды. К сожалению разбиения пространства большим числом систем (мне кажется) почти не рассматривались (хотя такие разбиения должны иметь отношения к квазикристаллам). На практике наблюдался случай четырех систем прямых. Меня интересовало распределение блоков по объемам. С точностью до аффинного преобразования можно считать, что первые три системы разбивают пространство на единичные кубы, четвертая система их доразбивает. Так я пришел к формуле объема пересечения куба с полупространством, которая имеет красивое  $n$ -мерное обобщение.

Рассмотрим единичный куб  $K: K = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$  и полупространство  $P_d$ , задаваемое неравенством

$$\sum a_i x_i \leq d.$$

Выберем направления осей координат так, чтобы все коэффициенты  $a_i$  стали неотрицательными. Для этого поступим так.

Если только один коэффициент  $a_i$  отрицательный, то сделаем замену  $x_i \rightarrow 1 - x_i$ ; при этом  $a_i$  заменится на  $-a_i$ , куб  $K$  перейдет в себя, а свободный член  $d$  станет равным  $d + a_i$ . Если же отрицательных коэффициентов  $a_i$  больше одного, поступим аналогично: для множества  $I \subset \{1, \dots, n\}$  индексов  $i$ , заданных условием  $a_i < 0$ , сделаем ту же подстановку  $x_i \rightarrow 1 - x_i$ , оставив все остальные координаты  $x_i$  без изменений. Как и раньше, куб  $K$  перейдет в себя, а полупространство  $P_d$  — в полупространство  $P'_d = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i \in I} a'_i x_i \leq d'\}$ . После такого преобразования объемы пересечений  $K \cap P_d$  и  $K \cap P'_d$  будут одинаковыми,  $d' = d + \sum_{i \in I} a_i$ , а все коэффициенты  $a'_i = |a_i|$  станут неотрицательными, чего мы и добивались.

Далее, если  $a_i = 0$  для некоторого  $i$ , то полупространство  $P_d$  параллельно  $i$ -й оси координат и  $n$ -мерный объем  $K \cap P_d$  равен  $(n - 1)$ -мерному

объему пересечения  $P_d$  с соответствующей гранью куба, так что ситуация сводится к меньшей размерности. В дальнейшем считаем поэтому, что  $a_i > 0$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Разделив обе части неравенства  $\sum_{i \in I} a_i x_i \leq d$  на  $\sqrt{\sum_{i \in I} a_i^2}$ , приходим к случаю, когда  $\sqrt{\sum_{i \in I} a_i^2} = 1$ . В этом случае  $V_n(d)$  — объем пересечения  $K \cap P_d$  — задается равенством:

$$V_n(d) = \frac{1}{n! \prod_{i=1}^n a_i} \left( \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left( d - \sum_{i \in I} a_i \right)_+^n \right). \quad (1)$$

Здесь все  $a_i$  положительны,  $x_+ = \max(x, 0)$ , а  $|I|$  — число элементов множества  $I$ ; если  $I = \emptyset$ , то полагаем  $|I| = 0$  и  $\sum_{i \in I} a_i = 0$ .

В частности, если  $d \leq 0$ , то  $V_n(d) = 0$ , а если  $d \geq \sum_{i=1}^n a_i$ , то  $V_n(d) = 1$ .

В размерностях  $n = 1, 2$  и  $3$  формулы для объема превращаются в такие. Если  $n = 1$ , то длина пересечения единичного отрезка и луча  $x \leq d$  равна

$$V_1(d) = d_+ - (d - 1)_+.$$

В двумерном и трехмерном случаях правая часть принимает вид:

$$V_2(d) = \frac{1}{2} (a_1 a_2) \cdot \left( d_+^2 - (d - a_1)_+^2 - (d - a_2)_+^2 + (d - a_1 - a_2)_+^2 \right)$$

и

$$V_3(d) = \frac{1}{6} (a_1 a_2 a_3)^{-1} \cdot \left( d_+^3 - (d - a_1)_+^3 - (d - a_2)_+^3 - (d - a_3)_+^3 + \right. \\ \left. + (d - a_1 - a_2)_+^3 + (d - a_2 - a_3)_+^3 + (d - a_3 - a_1)_+^3 + \right. \\ \left. - (d - a_1 - a_2 - a_3)_+^3 \right),$$

соответственно.

Из формулы (1) можно получить формулу для площади сечения куба границей полупространства  $P_d$ . Для этого заметим, что число  $d$  есть расстояние от начала координат  $O$  до границы полупространства  $P_d$ , а разность объемов  $V(d + \Delta d) - V(d) = S(d)\Delta d + o(\Delta)$ , где  $S(d)$  — искомая площадь сечения куба. Продифференцировав равенство (1) по параметру  $d$ , получаем следующую формулу для площади сечения:

$$S(d) = \frac{1}{(n-1)! \prod_{i=1}^n a_i} \left( \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left( d - \sum_{i \in I} a_i \right)_+^{n-1} \right). \quad (2)$$

Равенство нулю  $S(d)$  при  $d \geq \sum a_i$  (т.е. когда граница  $\partial P_d$  полупространства не пересекает куба  $K$ ) означает забавное комбинаторное тождество:

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \left( d - \sum_{i \in I} a_i \right)_+^{n-1} \equiv 0. \quad (3)$$

(Нижние значки «+» сняты, ибо все члены положительны, поэтому левая часть — многочлен от переменных  $d$  и  $a_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ . Равенство нулю многочлена в открытой области влечет тождественное равенство нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (1)

Отметим, что выражение  $\frac{1}{n!} \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{-1} \cdot d_+^n$  характеризует объем пересечения  $P_d$  с положительным ортантом

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0\}.$$

Величина

$$\frac{1}{n!} \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{-1} \left( d - \sum_{i=1}^n a_i f_i \right)_+^n$$

равна объему пересечения  $P_d$  со сдвигом  $Q^{\vec{f}}$  положительного ортанта  $Q$  на вектор  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$  (т. е. с областью  $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq f_i\}$ ). Пусть  $V_I^d$  — объем пересечения  $P_d$  с областью

$$U_I = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i \notin I, x_i \geq 1, i \in I\}.$$

В частности,  $U_\emptyset = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \geq 0\}$ . Тогда формула (1) примет вид:

$$V_n(d) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} V_I^d.$$

Пусть  $Q_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \geq 0, j \neq i, x_i \geq 1\}$ . Тогда  $U_I = \bigcap_{i \in I} Q_i$  и формула (1) окажется частным случаем (когда  $\Phi = P_d$ ) формулы

$$\text{Vol}(K \cap \Phi) = \text{Vol}(\Phi \cap U_\emptyset) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} (-1)^k \cdot \text{Vol}(\Phi \cap Q_{i_1} \cap \dots \cap Q_{i_k}). \quad (4)$$

Здесь  $\text{Vol}(M)$  — объем множества  $M$ ,  $\Phi$  — произвольная фигура, пересечение которой с любым сдвигом положительного ортанта ограничено.

Докажем равенство (4). Единичный куб  $K$  дополняется до  $Q$  объединением множеств  $Q_i$ . То же верно и для пересечения соответствующих множеств с  $\Phi$ . Пусть  $\Phi_j = \Phi \cap Q_j$ . Тогда  $\Phi \cap Q_{i_1} \cap \dots \cap Q_{i_k} = \Phi_{i_1} \cap \dots \cap \Phi_{i_k}$ , и достаточно проверить, что величина

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Vol}(\Phi_{i_1} \cap \dots \cap \Phi_{i_k}).$$

есть объем объединения  $\bigcup_j \Phi_j$ . Но это есть частный случай формулы включения–исключения.

Напомним эту формулу. Пусть  $U_i$  – семейство множеств,  $|U|$  означает объем множества  $U$ . Тогда

$$|\cup U_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}|.$$

(В дискретном случае обычно полагают в качестве  $|U|$  число элементов. Тогда получается формула из обычной комбинаторики (см. [1].) )

Смысл этой формулы таков: чтобы подсчитать число элементов (объем) объединения, надо просуммировать количества элементов (объемы) множеств. Но тогда попарные пересечения окажутся добавленными лишней раз. Их надо вычесть. Но тогда надо сделать поправку на тройные пересечения, и т. д.

#### ЗАМЕЧАНИЯ.

1. С каждым множеством  $U$  можно связать *характеристическую функцию*  $\xi_U$ :  $\xi_U(x) = 1$  при  $x \in U$ ,  $\xi_U(x) = 0$  при  $x \notin U$ . Объем множества  $U$  равен  $\int \xi_U$ . Пусть  $\Delta_i: g(x) \rightarrow g - T_{\vec{e}_i}(g)$ , где  $T_{\vec{f}}(g)(x) = g(x + \vec{f})$ . Если  $L = [0, 1]$ ,  $R = [0, \infty)$  то  $\xi_L = \Delta_1(\xi_R)$ . Характеристическая функция куба  $\xi_K$  получается из характеристической функции положительного ортанта  $Q$  применением оператора  $\prod_{i=1}^n \Delta_i$ . Но

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \Delta_i(\xi_Q) &= (1 - T_{\vec{e}_1}) \cdot \dots \cdot (1 - T_{\vec{e}_n})(\xi_Q) = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n, \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} (-1)^k T_{\vec{e}_{i_1}}(\xi_Q) \cap \dots \cap T_{\vec{e}_{i_k}}(\xi_Q). \end{aligned}$$

Отсюда также следует формула (4).

2. Аналогичным образом с помощью включения–исключения доказывается поляризационная формула:

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n)^n - \sum_i (x_1 + \dots + \widehat{x}_i + \dots + x_n)^n + \dots + \\ + (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} (x_1 + \dots + \widehat{x}_{i_1} + \dots + \widehat{x}_{i_k} + \dots + x_n)^n + \\ + \dots + (-1)^n \sum x_i^n = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Если переменные  $x_i$  коммутируют, то правая часть в этой формуле равна  $n!(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$ .

3. В школе нас приучают избегать крупных формул. Однако правильно организованная формула (своего рода иероглиф) оказывается красивой! А красота служит проверке правильности.

Автор признателен Г. А. Гальперину, побудившему его написать данную заметку и обратившему внимание на задачу о площади сечения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виленкин Н. Я. *Комбинаторика*. М.: Наука, 1967.
- [2] Белов А. Я. *Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов*. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ. мат. наук. М.: МГИ, 1991.