Избранные задачи 27 Турнира Городов

С. А. Дориченко

В этой небольшой заметке приводятся условия и решения нескольких красивых задач, предлагавшихся в октябре 2005 года участникам осеннего основного тура 27 Турнира городов.

По краю многоугольного стола ползут два муравья. Все стороны стола длиннее 1 *м, а расстояние между муравьями всегда ровно* 10 *см. Сначала оба муравья находятся на одной из сторон стола.*
а) *Пусть стол выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы в каждой точке края побывал каждый из муравьев?*
б) *Пусть стол не обязательно выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы на краю не осталось точек, в которых не побывал ни один из муравьев?* (А. В. Акопян)

Ответ в обоих пунктах отрицательный, хотя многие школьники пытались доказать обратное.

Обозначим первого муравья буквой P, а второго — буквой Q. По условию длина отрезка PQ всегда равна 10 см.

а) Рассмотрим ромб $ABCD$, где $AC = 5$ см, $BD = 2$ м, изначально муравьи находятся на одной из сторон. Для удобства объяснения расположим ромб так, чтобы диагональ BD была горизонтальной.

Посмотрим, как может двигаться отрезок PQ. Пусть сначала P левее Q. Если бы в результате некоторого движения муравьев P оказался правее Q, то в процессе этого движения отрезок PQ в какой-то момент должен был быть вертикальным (что ясно из непрерывности движения). Но это невозможно: самый длинный вертикальный отрезок с концами на

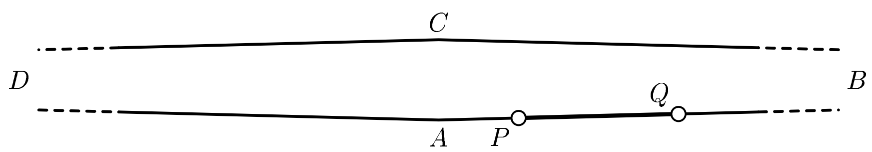

Рис. 1. *Муравьи ползают по краю выпуклого стола*

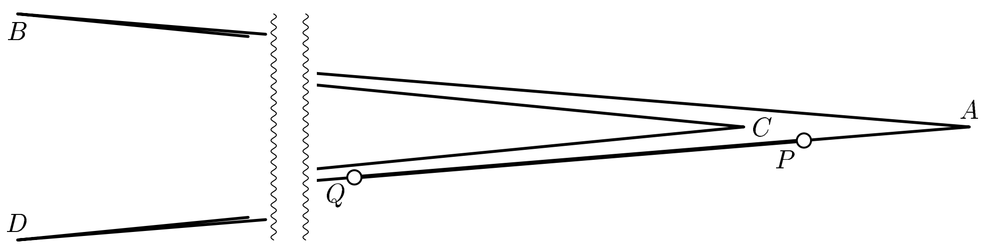

Рис. 2. *Муравьи ползают по краю невыпуклого стола*

сторонах ромба — это AC, а его длина меньше 10 см. Значит P всегда будет левее Q, откуда Q никогда не попадет в левую вершину ромба (а P — в правую).

б) Рассмотрим невыпуклый четырехугольник $ABCD$, похожий на узкую и вытянутую букву V, повернутую на $90°$ против часовой стрелки: диагональ AC горизонтальна и имеет длину 5 см, A правее C, диагональ BD вертикальна и тоже имеет длину 5 см; $CB = CD = 2$ м (точки A и C обе правее B).

Пусть изначально муравьи находятся на стороне AD, P правее Q. Как и в пункте а), отрезок PQ никогда не будет вертикальным. Поэтому муравей P снова всегда будет правее Q.

Докажем, что ни один из муравьев не сможет попасть в точку C.

Если бы один муравей попал в точку C, другой в этот момент был бы левее его (так как самая дальняя от C точка не левее ее — это точка A, но $AC < 10$ см). Поэтому муравей Q не сможет оказаться в C: ведь он тогда был бы правее P. А муравей P не может оказаться в C, поскольку не может покинуть сторон AD и AB: попасть на две оставшиеся стороны он мог бы только через одну из вершин B или D, но в этот момент Q оказался бы правее P.

Еще один интересный вопрос не был включен в олимпиаду из-за его сложности: *всегда ли муравьи смогут проползти по краю выпуклого стола так, чтобы на краю не осталось точек, в которых не побывал ни один из муравьев?*

А во второй половине прошлого века на семинаре Е. М. Ландиса в Московском Государственном Университете разбирался следующий, близкий по теме, вопрос:

На прямой дана непрерывная функция f, равная нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$. На оси абсцисс слева от отрезка $[a, b]$ расположен отрезок l. Всегда ли можно передвинуть его в координатной плоскости так, чтобы его концы все время оставались на графике функции f и двигались бы непрерывно, а в итоге l оказался бы на оси абсцисс справа от отрезка $[a, b]$?

Предлагаем желающим читателям ответить на эти вопросы самостоятельно!

У Карлсона есть 1000 *банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем* 1/100 *часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых* 100 *банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть всё варенье.* (Д. Мусатов)

Задача была предложена ученикам 8 и 9 классов, но оказалась очень сложной: пока ее решил лишь один участник (к моменту написания этой заметки были проверены не все работы). Приведем решение, написанное членом жюри Турнира Городов А. В. Николаевым.

Предположим, Карлсон умеет съедать все варенье, если вместо 1/100 и 100 в условии указано 1/99 и 99 (общее количество банок неважно, главное, что их достаточно много, не меньше 100). Будем говорить про эти задачи соответственно «задача-100» и «задача-99». Объясним, как тогда действовать Карлсону в случае «задачи-100».

Он мысленно делит все банки варенья на самую большую (по количеству варенья) и остальные. Заметим, что для «остальных» банок выполняется условие «задачи-99» (ведь в «остальных» банках не меньше, чем 99/100 всего варенья, и в каждой из этих банок не более 1/100 всего варенья, то есть не более $(1/100)\cdot(100/99) = 1/99$ от количества варенья в «остальных» банках).

Поэтому Карлсон мог бы действовать так: съесть из «остальных» банок все варенье по алгоритму «задачи 99», на каждом шаге беря набор 99 банок из «остальных» и добавляя все время одну и ту же сотую банку — «самую большую». Для того, чтобы варенье в «самой большой» банке и «остальных» кончилось одновременно, необходимо, чтобы в ней было ровно в 99 раз меньше варенья, чем суммарно в «остальных» банках (поскольку, разумеется, из нее каждый раз съедается в 99 раз меньше, чем из «остальных»). То есть необходимо, чтобы в «самой большой» банке изначально была ровно 1/100 доля от общего количества варенья.

Объясним, как Карлсону добиться этого. Пусть в «самой большой» банке меньше 1/100 общего количества варенья. Карлсон будет выбирать 100 непустых банок из «остальных» и съедать из них некоторое количество варенья. Доля варенья в «самой большой» банке при этом будет увеличиваться. Покажем, как ему действовать, чтобы гарантированно довести эту долю до 1/100. Если количество варенья в самой маленькой банке (из выбранных ста) позволяет съесть часть варенья так, чтобы доля «самой большой» банки стала равна 1/100, он так и делает. Иначе съедает все варенье из самой маленькой банки, уменьшая количество непустых банок. Когда он остановится? Либо когда добьется требуемого, либо когда непустых банок среди «остальных» станет меньше 100. Но в последнем случае доля «самой большой» точно не меньше 1/100, т. е. Карлсон должен был остановиться раньше.

Итак, сначала Карлсон подготавливает банки: добивается, чтобы в «самой большой» банке была ровно $1/100$ доля от общего количества варенья (при этом условие «задачи 100», очевидно, будет по-прежнему выполнено). Затем, используя алгоритм «задачи-99», съедает все варенье, как написано выше.

Для завершения решения осталось заметить, что мы научились сводить «задачу-100» к «задаче-99», но точно также можно свести ее теперь к «задаче-98», ту в свою очередь к «задаче-97», и т. д. Ну а «задача-1» совершенно очевидна.

На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. *Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на* 1. (*Замечание. Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.*) (М. И. Малкин)

Верна и более общая задача: в тех же условиях можно для любого натурального числа n разделить окружность на n дуг так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на 1.

Сначала разобъем окружность на n дуг произвольным образом. Пусть найдутся две соседние дуги, суммы чисел на которых отличаются больше, чем на 1. Тогда передвинем границу этих дуг так, чтобы на дуге с большей суммой стало на одно число меньше, а на дуге с меньшей суммой — на это же одно число больше. Если и после такого изменения найдутся соседние дуги с разностью, большей 1, снова сделаем аналогичное изменение, и т.д. Остается вопрос: приведет ли наш алгоритм когда-нибудь к цели, или он может продолжаться бесконечно долго?

Автор задачи М. И. Малкин придумал простое и красивое доказательство корректности алгоритма. Занумеруем дуги (числами от 1 до n) и рассмотрим сумму $x_1^2+\ldots+x_n^2$, где x_i — сумма чисел на i-й дуге. Пусть, например, $x_{i+1}-x_i>1$. Применив наш алгоритм, получим две новые соседние дуги с суммами $x_{i+1}-a$ и x_i+a. При этом разница между старой суммой квадратов и новой равна $x_{i+1}^2+x_i^2-(x_{i+1}-a)^2-(x_i+a)^2 = 2a(x_{i+1}-x_i-a)>0$, поскольку $x_{i+1}-x_i>1$ и $0\leqslant a<1$. Значит, сумма квадратов уменьшилась. Но сумма квадратов может принимать лишь конечное число значений (поскольку есть лишь конечное число способов разбить числа на окружности на n частей) и значит не может уменьшаться бесконечное число раз. Поэтому в конце концов мы придем к искомому разделению.

Точно так же доказывается следующий факт: для любого натурального n любой конечный набор положительных чисел, не превосходящих 1, можно разбить на n частей (среди которых могут быть пустые, с нулевой суммой) так, что суммы чисел в любых двух частях будут отличаться не больше, чем на 1.

История очередной задачи очень интересна. В журнале «Квант» №8 за 1983 год И. Ф. Шарыгин опубликовал статью «Вокруг биссектрисы», в которой сформулировал забавный вопрос, мало известный тогда даже среди любителей геометрии: *Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный*? И. Ф. Шарыгин доказал, что утверждать это нельзя (подробности см. например в его книге «Геометрия. Планиметрия. 9–11 классы», Дрофа, 2001, задача 500), но не сумел построить конкретного примера неравнобедренного треугольника (т. е. точно указать величины всех его углов) с таким экзотическим свойством. Недавно пример удалось построить С. И. Токареву, причем треугольник оказался хорошо известным любителям геометрии. Так возникла следующая задача:

Дан треугольник ABC, AA_1, BB_1 *и* CC_1 *— его биссектрисы. Известно, что величины углов* A, B *и* C *относятся как* $4:2:1$. *Докажите, что* $A_1B_1 = A_1C_1$. (С. И. Токарев)

Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Углы нашего треугольника равны $4\pi/7$, $2\pi/7$ и $\pi/7$; поэтому, разделив окружность на 7 равных дуг, начиная с точки A, получим вписанный в окружность правильный семиугольник $ABXYZCT$.

Заметим сначала, что AA_1 — биссектриса угла A, и значит проходит через точку Y — середину дуги BC. Аналогично BB_1 — биссектриса угла B, и значит проходит через точку T — середину дуги AC.

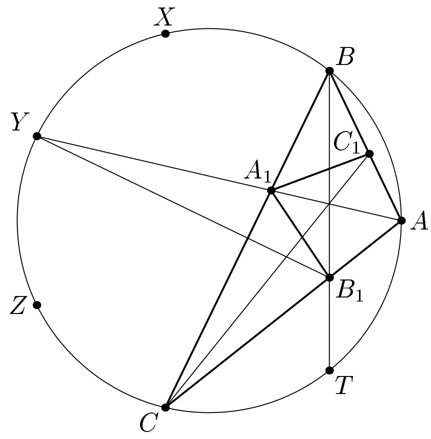

Рис. 3.

Докажем, что $\triangle BCC_1 = \triangle AYB_1$. Действительно, $BC = AY$ из симметрии; $\angle C_1BC = 2\pi/7 = \angle B_1AY$ (опираются на одинаковые дуги), и $\angle BCC_1 = \pi/14 = \angle AYB_1$ (первое равенство верно, так как CC_1 — биссектриса угла C, второе — так как YB_1 — биссектриса угла AYT из симметрии). Тем самым треугольники равны по второму признаку. А значит $YB_1 = CC_1$.

Но тогда треугольники YA_1B_1 и CA_1C_1 равны по первому признаку ($\angle A_1YB_1 = \pi/14 = \angle A_1CC_1$, $A_1Y = A_1C$ из симметрии, $YB_1 = CC_1$ по доказанному). Откуда $A_1B_1 = A_1C_1$, что и требовалось доказать.

С. А. Дориченко, Турнир Городов, НМУ, школы №57 и №179 г.Москвы
E-mail: `dsa@mccme.ru`