По мотивам задачника «Математического просвещения»

В этом номере мы приводим решение задачи 5.9 из задачника «Математического просвещения». Эта задача связана с дискретным аналогом *гармонических функций*, т. е. функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\Delta f = 0.$$

Гармонической на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ называется такая функция $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, значение которой в каждой точке равно среднему арифметическому от значений соседей:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_1, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) \Big).$$

Супергармонической на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ называется такая функция, для которой вместо написанного выше равенства выполняется неравенство $\geqslant$ в каждой точке $(x_1, \ldots, x_n)$.

В непрерывном случае для гармонических функций справедлива теорема Лиувилля: *всякая ограниченная на* $\mathbb{R}^n$ *гармоническая функция постоянна*. Достаточно даже потребовать односторонней ограниченности. Аналогичное утверждение выполняется и для функций, гармонических на решетке: *если гармоническая на решетке функция неотрицательна, то она постоянна*. Частными случаями этого утверждения являются пункты б) и в) задачи 5.9[1]. Его доказательство, найденное германским школьником П. Шольце, приводится ниже. Другое доказательство этого факта, использующее бесконечномерную выпуклую геометрию, намечено в книге Е. Б. Дынкина, А. А. Юшкевича «Теоремы и задачи о процессах Маркова», М.: Наука, 1966. В этой замечательной книге объясняется связь между гармоническими и супергармоническими функциями на решетке и случайными блужданиями. В частности, на одномерной и двумерной решетках *все супергармонические неотрицательные функции постоянны*. Начиная с размерности 3, существуют непостоянные супергармонические неотрицательные функции. (Разница между малыми и большими

[1] Отметим также, что пункт б) можно найти в задачнике второй серии сборников «Математическое просвещение» (вып. 3, 1958, с. 269, задача 20).

размерностями обусловлена в данном случае возвратностью или невозвратностью случайного блуждания.)

В статье И. И. Богданова и Г. Р. Челнокова приводится решение пункта а) задачи 5.9. Там речь идет о естественном обобщении понятия супергармонических функций на одномерной решетке. Среди таких обобщенных супергармонических функций всюду неотрицательными являются только константы, как и в предыдущих случаях. Заметим, что этот результат также можно получить, изучая случайные блуждания на решетке.

Редколлегия «Математического просвещения» планирует продолжить публикации на эту тему.

Тем, кто заинтересовался дискретными гармоническими функциями, советуем также прочитать статью А. И. Храброва «Дискретные гармонические функции» в сборнике «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2005 года», СПб: Невский диалект, БХВ-Петербург, 2005; с. 112–145.