Обобщенные супергармонические последовательности

И. И. Богданов Г. Р. Челноков

В этой заметке приводится решение задачи 5.9а) из задачника «Математического просвещения». Напомним формулировку:

> В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трех соседей слева и трех справа. Докажите, что числа равны.

Формально числа, записанные в клетках бесконечной клетчатой ленты, можно рассматривать либо как функции $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ из множества целых чисел в множество действительных чисел, либо как бесконечные в обе стороны последовательности действительных чисел

$$\ldots, f_{-n}, \ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$$

Мы выбираем второй способ и далее говорим только о последовательностях.

Определение. Пусть F — непустое конечное множество целых чисел, симметричное относительно нуля, причем числа в F взаимно просты в совокупности. Последовательность a_n назовем *F-супергармонической*, если для любого n выполняется неравенство

$$a_n \geqslant \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} a_{n+f}\,.$$

Например, $\{-1, +1\}$-супергармонические последовательности — это то же самое, что супергармонические на $\mathbb{Z}^1$ функции.

Теорема. *Если F-супергармоническая последовательность неотрицательна, то она постоянна.*

Задача 5.9а) является частным случаем этой теоремы, в котором $F = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Для простоты изложения мы приводим только доказательство этого частного случая. Общее доказательство получается аналогично.

Бесконечные в обе стороны последовательности чисел образуют векторное пространство относительно операций покомпонентного сложения и умножения всех членов на константу. Зададим на этом векторном пространстве линейный оператор X сдвига влево: $X(a_n) = (b_n)$, где $b_n = a_{n+1}$.

Нас будут интересовать многочлены от X относительно стандартных операций: произведение операторов есть их композиция, например, оператор X^2 переводит последовательность (c_n) в (c_{n+2}); сложение операторов переводит последовательность в сумму ее образов, например, оператор X^2+2X+1 переводит последовательность (c_n) в $(c_{n+2}+2c_{n+1}+c_n)$; число λ понимается как оператор умножения каждого члена последовательности на λ. Каждый такой многочлен является линейным оператором.

Напомним, что в этом случае композиция линейных операторов совпадает с произведением многочленов, т. е. композиция операторов $P(X)$ и $Q(X)$ есть оператор $PQ(X)$. Например, $X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$, т. е., подействовав на последовательность сначала оператором $X+1$, а затем $X+2$ (или наоборот), мы получим тот же результат, как при действии оператором X^2+3X+2.

На этом языке удобно записываются многие понятия. Так, множество линейных рекуррент с уравнением $u_{n+k} = a_0u_n + a_1u_{n+1} + \dots + a_{k-1}u_{n+k-1}$ — это множество последовательностей, для которых

$$X^k(u_n) = (a_0 + a_1X + \dots + a_{k-1}X^{k-1})(u_n),$$

или, проще говоря, просто множество всех последовательностей, обнуляемых оператором $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_1X - a_0$, т. е. его ядро. Отсюда, раскладывая этот многочлен на линейные сомножители, нетрудно получить общую формулу линейной рекурренты.

Условие задачи 5.9а) формулируется теперь в следующем виде. Дана такая последовательность (a_n) положительных чисел, что

$$6a_{n+3} \geqslant a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+4} + a_{n+5} + a_{n+6},$$

или, другими словами, применение многочлена

$$P(X) = 1 + X + X^2 - 6X^3 + X^4 + X^5 + X^6$$

к последовательности (a_n) дает неположительную последовательность. Требуется доказать, что (a_n) есть константа.[1)]

Заметим, что $P(x) = (x-1)^2Q(x)$, причем все коэффициенты $Q(x)$ неотрицательны.[2)] Действительно, достаточно проверить этот факт для

[1)] При доказательстве теоремы многочлен $P(X)$ нужно заменить на соответствующий множеству F возвратный многочлен (F-многочлен).

[2)] Аналогичное утверждение справедливо и для произвольных F-многочленов, доказательство повторяется почти дословно.

многочленов $x^{k+r} - 2x^k + x^{k-r}$, потому что $P(x) = (x^6 - 2x^3 + 1) + (x^5 - 2x^3 + x) + (x^4 - 2x^3 + x^2)$. Для многочленов указанного вида утверждение очевидно:

$$x^{k+r} - 2x^k + x^{k-r} = x^{k-r}(x^r - 1)^2 = (x-1)^2 x^{k-r}(x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + 1)^2.$$

Далее, корни $Q(z)$ по модулю не равны 1, т.е. $Q(z) \neq 0$ при любом комплексном z, $|z| = 1$. Действительно, $|P(z)| \geqslant |6z^3| - 1 - |z| - |z^2| - |z^4| - |z^5| - |z^6| = 0$, причем равенство может достигаться лишь когда числа 1 и z имеют равные аргументы, т.е. $z = 1$. Но $Q(1) \neq 0$ из положительности коэффициентов.[3)]

Обозначим $Q(X)(a_n) = (b_n)$. Тогда элементы (b_n) получаются из элементов (a_n) линейной комбинацией с положительными коэффициентами (а именно, с коэффициентами многочлена Q); таким образом, последовательность (b_n) положительна. По условию, последовательность $(d_n) = (X-1)^2(b_n) = P(X)(a_n)$ неположительна. Покажем, что (b_n) постоянная. Пусть $(c_n) = (X-1)(b_n)$, тогда $(d_n) = (X-1)(c_n)$. По условию получаем $d_n = c_{n+1} - c_n \leqslant 0$, т.е. (c_n) не возрастает. Предположим, что существует $c_k \neq 0$. Если $c_k < 0$, то и все $c_l \leqslant c_k < 0$ при $l > k$. Тогда $b_{l+1} - b_l \leqslant c_k$ при $l > k$, т.е. b_l с возрастанием l на каждом шаге убывает хотя бы на $|c_k|$; это невозможно, так как (b_n) положительна. Аналогично, если $c_k > 0$, то при всех $l < k$ с уменьшением l величина b_l уменьшается хотя бы на c_k, что невозможно. Итак, $c_k \equiv 0$, что и означает, что (b_n) постоянная.

Так как коэффициенты q_i многочлена $Q(x)$ и члены последовательности (a_n) положительны, то $b_n = q_0 a_n + q_1 a_{n+1} + \dots \geqslant q_0 a_n$, т.е. $a_n \leqslant b_n/q_0 = b_0/q_0$, и последовательность (a_n) ограничена. Далее, заметим, что применение оператора $Q(X)$ к постоянной последовательности умножает ее на $Q(1)$. Поскольку последовательность $Q(X)(a_n)$ постоянная и $Q(1) \neq 0$, то из (a_n) можно вычесть постоянную последовательность $c = b_0/Q(1)$ и получить такую (ограниченную!) последовательность $a'_n = a_n - c$, что $Q(X)(a'_n) = (0)$.

Решение хотелось бы закончить так. Мы получили, что (a'_n) есть линейная рекуррента, у характеристического уравнения которой нет корней, по модулю равных 1. Применив общую формулу линейной рекурренты, получаем, что (a'_n) есть линейная комбинация последовательностей вида $(R(n)\alpha^n)$, где α пробегает множество корней $Q(x)$, а $R(n)$ — многочлен. Казалось бы, поскольку $|\alpha| \neq 1$, то такая последовательность

[3)]При доказательстве теоремы аналогичное утверждение нужно доказать для произвольного F-многочлена. В этом доказательстве существенно используется условие, что числа из F взаимно просты.

Дальнейшие рассуждения опираются на указанные свойства F-многочленов, а в остальном от вида F они не зависят.

ограничена лишь когда $a'_n \equiv 0$. Это и в самом деле верно, но известные нам доказательства основаны на достаточно тонких рассуждениях с применением теоремы Кронекера.

Поэтому завершим доказательство несколько иначе (и проще).

Мы должны показать, что, применяя $Q(X)$ к ограниченной ненулевой последовательности, нельзя получить (0). Разложим $Q(x)$ на линейные множители; тогда достаточно доказать это для одного такого множителя $X-\alpha$, где $|\alpha| \neq 1$ (действительно, поскольку этот оператор переводит ограниченные последовательности в ограниченные, то по индукции сразу получается требуемое). Однако $X-\alpha$, очевидно, обнуляет лишь последовательности вида $u_n = \alpha^n u_0$, которые при $|\alpha| \neq 1$ и $u_0 \neq 0$ не ограничены, что и требовалось доказать.

Замечание. Похожими методами легко решается, например, задача 7.11 из задачника «Математического просвещения». Напомним ее условие:

> Все комплексные корни уравнения $A_0X^n + A_1X^{n-1} + \dots + A_n = 0$ по модулю строго меньше 1. Последовательность $\{v_k = A_0u_{k+n} + A_1u_{k+n-1} + \dots + A_nu_k\}$ — сходится. Докажите, что последовательность $\{u_k\}$ тоже сходится.

Достаточно понять, что на классе ограниченных последовательностей верно операторное равенство $(1-aX)(1+aX+a^2X^2+\dots) = 1$, если $|a| < 1$.

И. И. Богданов, МФТИ
e-mail: `iibogdanov@yahoo.com`

Г. Р. Челноков