О неотрицательных гармонических функциях на решетке

П. Шольце

Гармонической на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ называется такая функция $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, значение которой в каждой точке равно среднему арифметическому от значений соседей:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_1,\ldots,x_i-1,\ldots,x_n)+f(x_1,\ldots,x_i+1,\ldots,x_n)\Big).$$

Данная заметка посвящена доказательству следующего утверждения, из которого, в частности, следуют пункты б) и в) задачи 5.9 задачника «Математического просвещения».

Теорема. *Гармоническая на решетке неотрицательная функция постоянна.*

Аналогично одномерному случаю (см. предыдущую статью И. И. Богданова и Г. Р. Челнокова) мы введем операторы сдвига $X_1, \ldots, X_n$, действующие на наших функциях по следующему правилу:

$$(X_i f)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_i+1,\ldots,x_n).$$

Таким образом, X_i «сдвигает» расстановку чисел в узлах решетки на 1 по i-й координате. Условие гармоничности функции записывается с помощью операторов сдвига как

$$(X_1 + X_1^{-1} + X_2 + X_2^{-1} + \cdots + X_n + X_n^{-1})f = 2nf$$

или

$$(X_1 + X_1^{-1} + X_2 + X_2^{-1} + \cdots + X_n + X_n^{-1} - 2n)f = 0,$$

где 0 — тождественно нулевая расстановка.

Операторы сдвига коммутируют. Поэтому можно рассматривать многочлены от операторов X_i, X_i^{-1} с действительными коэффициентами, понимая умножение операторов как композицию, а сложение и умножение на число — как сложение и умножение на число функций $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$.

Перевод и редактирование И. И. Богданова.

Заметим, что, применяя многочлен от сдвигов X_i, X_i^{-1} к гармонической функции, мы опять получаем гармоническую функцию. При этом, если коэффициенты многочлена и исходная функция неотрицательны, то и полученная функция неотрицательна.

Мы будем вести доказательство индукцией по n. Доказательство для $n = 1$ тривиально, поскольку одномерная гармоническая функция линейна, а ограниченная линейная функция постоянна.

Для шага индукции достаточно доказать, что функция f из условия теоремы удовлетворяет неравенству

$$2(n-1)f \geqslant (X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})f \tag{1}$$

(подобные неравенства мы всегда будем воспринимать поточечно; в частности, данное неравенство означает, что значение левой функции в каждой точке не меньше, чем соответствующее значение правой). Действительно, тогда из симметрии выполняются неравенства такого же вида с заменой индекса 1 на i; просуммировав по всем i, мы получим, что

$$(2n - X_1 - X_1^{-1} - X_2 - X_2^{-1} - \dots - X_n - X_n^{-1})f \geqslant 0.$$

Поскольку это неравенство обращается в равенство, то обращались в равенство и все слагаемые, т. е. при любом j

$$\Big(\sum_{i \neq j}(X_i + X_i^{-1})\Big)f = 2(n-1)f.$$

Зафиксируем произвольное $a \in \mathbb{Z}$. Тогда функция

$$f_1\colon (x_2, \dots, x_n) \mapsto f(a, x_2, \dots, x_n)$$

является неотрицательной гармонической функцией на $(n-1)$-мерной решетке, по предположению индукции она постоянна; по тем же причинам и функция

$$f_2\colon (x_1, x_3, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, a, x_2, \dots, x_n)$$

постоянна. А тогда и функция f также постоянна.

Осталось доказать неравенство (1).

Введем многочлен $m(x_2, \dots, x_n) = (2n-2) - x_2 - x_2^{-1} - \dots - x_n - x_n^{-1}$ и обозначим через M соответствующий ему оператор $m(X_2, \dots, X_n)$. Нам нужно доказать, что $Mf \geqslant 0$. Заметим, что $(Mf)(x_1, x_2, \dots, x_n)$ зависит только от значений функции при данном фиксированном x_1.

Сумма сдвигов вдоль первой координаты $(X_1 + X_1^{-1})f$ выражается через сдвиги f вдоль остальных координат; иначе говоря, сумма двух значений f в точках, симметричных относительно плоскости $x_1 = a$, выражается через значения f в этой плоскости. Выясним, как именно она выражается.

Введем многочлены

$$p_0(t) = 2, \quad p_1(t) = 2 + t, \quad p_{k+2}(t) = (2+t)p_{k+1}(t) - p_k(t).$$

Положим $P_k = p_k(M)$.

Лемма 1. *$P_k f = (X_1^k + X_1^{-k})f$ при любом k. Как следствие, $P_k f \geqslant 0$.*

Доказательство. Индукция по n. Для $n = 0, 1$ утверждение очевидно. Для остальных значений n из определения гармонической функции получаем

$$\begin{aligned}
&(X_1^k + X_1^{-k})f = \\
&\quad = (X_1^{k-1}(X_1 + X_1^{-1}) - X_1^{k-2} + X_1^{-k+1}(X_1 + X_1^{-1}) - X_1^{-k+2})f = \\
&\quad = -(X_1^{k-2} + X_1^{k-1}(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1} - 2n))f - \\
&\quad - (X_1^{-k+2} + X_1^{-k+1}(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1} - 2n))f = \\
&\quad = (X_1^{k-1} + X_1^{-k+1})(2+M)f - (X_1^{k-2} + X_1^{2-k})f = \\
&\quad = ((2+M)P_{k-1} - P_{k-2})f = P_k f,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. Из доказательства леммы следует, что любую функцию, заданную на плоскости $x_1 = 0$, можно продолжить гармоническим образом на всю область определения: она восстанавливается из доказанной леммы, *если предположить*, что она симметрична относительно этой же плоскости. При этом, очевидно, она не обязана быть неотрицательной, даже если исходные данные были неотрицательными.

Теперь мы временно забудем про операторы P_k и выясним несколько свойств многочленов $p_k(t)$.

Лемма 2. *$p_k(2\cos\alpha - 2) = 2\cos(k\alpha)$.*

Доказательство. Индукция по k. При $k = 0$ и $k = 1$ это очевидно. Используя определение многочленов $p_k(t)$, получаем

$$\begin{aligned}
&p_{k+2}(2\cos\alpha - 2) = 2\cos\alpha\, p_{k+1}(2\cos\alpha - 2) - p_k(2\cos\alpha - 2) = \\
&\quad = 2(2\cos\alpha\cos(k+1)\alpha - \cos k\alpha) = 2(\cos(k+2)\alpha + \cos k\alpha - \cos k\alpha) = \\
&\quad = 2\cos(k+2)\alpha
\end{aligned}$$

из предположения индукции. □

Замечание. Из леммы 2 сразу вытекает, что $p_k(t) = 2T_k\left(\frac{t}{2} + 1\right)$, где $T_k(t)$ — многочлен Чебышёва степени k.

Лемма 3. *$p_k(t) = 2 + (t - t_1) \cdot \ldots \cdot (t - t_k)$, где $t_j = 2\cos\frac{2j\pi}{k} - 2$. Как следствие, $p_k(t) \geqslant 2$ при $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 2, корнями многочлена $p_k(t) - 2$ являются $t_j = 2\cos\frac{2i\pi}{k} - 2$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Некоторые числа встречаются среди списка t_j дважды. Однако, если $d = t_r = t_j$, то $r + j = k$, и $-4 < d < 0$; заметим, что при $t \in [-4, 0]$ выполняется неравенство

$$|p(t)| = 2\left|\cos\left(k \arccos\frac{t+2}{2}\right)\right| \leqslant 2,$$

а $p(d) - 2 = 0$, поэтому d — внутренняя точка локального максимума $p_k(t) - 2$ и, как следствие, его корень кратности 2. Таким образом, мы насчитали k корней многочлена $p_k(t) - 2$; кроме того, его старший коэффициент равен 1 (из определения). Тогда $p_k(t) = 2 + (t - t_1) \cdot \ldots \cdot (t - t_k)$. При этом все t_i неположительны, откуда следует второе утверждение леммы. □

Пусть r — наименьшее неотрицательное число такое, что неравенство $(M + r)g \geqslant 0$ выполняется для *любой* неотрицательной гармонической функции g. Заметим, что $(M+2)g = (X_1 + X_1^{-1})g \geqslant 0$ из леммы 1; поэтому r существует и не превосходит 2. Требуемое неравенство (1) эквивалентно тому, что $r = 0$.

Предположим, что $r > 0$. Разделим многочлен $p_k(t)$ с остатком на $(t - 2(n-1))(t + r)$:

$$p_k(t) = (t - 2(n-1))(t + r)q_k(t) + r_k(t), \quad \deg r_k \leqslant 1. \tag{2}$$

Лемма 4. *$q_k(t)$ можно представить в виде*

$$q_k(t) = \sum_{l=0}^{k-2} A_l p_l(t),$$

где $A_l \geqslant 0$.

Доказательство. Подставим в (2) $t = 2\cos\alpha - 2$ и положим $z = e^{i\alpha}$. Тогда $t = z + z^{-1} - 2$, а $p_k(t) = z^k + z^{-k}$. Соответственно, частное q_k принимает вид

$$\begin{aligned} q_k(z + z^{-1} - 2) &= \frac{z^k + z^{-k} - r_k(z + z^{-1} - 2)}{(z + z^{-1} - 2n)(z + z^{-1} + (r - 2))} = \\ &= A_{k-2}(z^{k-2} + z^{-k+2}) + A_{k-3}(z^{k-3} + z^{-k+3}) + \cdots + A_0, \end{aligned} \tag{3}$$

поскольку $q_k(z + z^{-1} - 2)$ симметрично относительно замены $z \mapsto z^{-1}$. Заметим, что тогда $q_k(t) = A_{k-2}p_{k-2}(t) + \cdots + A_0$, ибо для любого t найдется такое (возможно, комплексное) z, что $t = z + z^{-1} - 2$. Поэтому нам надо доказать неотрицательность коэффициентов A_l.

При $z \to \infty$ имеем

$$q_k(z + z^{-1} - 2) = A_{k-2}z^{k-2} + A_{k-3}z^{k-3} + \cdots + A_1 z + A_0 + o(1).$$

С другой стороны,

$$q_k(z+z^{-1}-2)=$$
$$=\frac{z^k}{(z+z^{-1}-2n)(z+z^{-1}+(r-2))}+\frac{z^{-k}-r_k(z+z^{-1}-2)}{(z+z^{-1}-2n)(z+z^{-1}+(r-2))}=$$
$$=\frac{z^k}{(z+z^{-1}-2n)(z+z^{-1}+(r-2))}+o(1),$$

поскольку $r_k(t)$ не более, чем линеен.

Значит, при $z\to\infty$

$$\frac{z^k}{(z+z^{-1}-2n)(z+z^{-1}+(r-2))}=A_{k-2}z^{k-2}+A_{k-3}z^{k-3}+\dots+A_1z+A_0+o(1).$$

Подставив $x=1/z$ и домножив на x^{k-2}, получаем при $x\to 0$

$$\frac{1}{(x^2+1-2nx)(x^2+1+(r-2)x)}=A_{k-2}+A_{k-3}x+\dots+A_1x^{k-3}+A_0x^{k-2}+$$
$$+o(x^{k-2}),$$

т. е. A_l есть коэффициенты ряда Маклорена функции

$$\frac{1}{(x^2+1-2nx)(x^2+1+(r-2)x)}=$$
$$=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2nx+1}\cdot\frac{1}{(x^2-2x+1)(x^2+(r-2)x+1)}=u(x)v(x).$$

Достаточно доказать, что ряд Маклорена каждого из сомножителей неотрицателен. Пусть $\nu_1>1$, $\nu_2=1/\nu_1$ — корни многочлена $x^2-2nx+1$, тогда

$$u(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2nx+1}=1+\frac{(2n-2)x}{(1-\nu_1x)(1-\nu_2x)}=$$
$$=1+\frac{(2n-2)x}{\nu_1-\nu_2}\left(\frac{\nu_1}{1-\nu_1x}-\frac{\nu_2}{1-\nu_2x}\right)=1+\frac{2n-2}{\nu_1-\nu_2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\nu_1^lx^l-\sum_{l=1}^{\infty}\nu_2^lx^l\right)=$$
$$=1+\frac{2n-2}{\nu_1-\nu_2}\sum_{l=1}^{\infty}(\nu_1^l-\nu_2^l)x^l,$$

где все коэффициенты, очевидно, положительны.

Рассмотрим $v(x)$. Заметим, что у ряда

$$\frac{1}{1-2x+x^2}=1+2x+3x^2+\dots$$

все коэффициенты положительны. Тогда, если $r=0$, то сомножитель

$v(x)$, равный квадрату этого ряда, положителен. Если же $r > 0$, то

$$xv(x) = \frac{x}{(x^2+1-2x)(x^2+1+(r-2)x)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1-2x+x^2} - \frac{1}{1+(r-2)x+x^2}\right).$$

Аналогично проведенным выше вычислениям, имеем

$$rxv(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)x^l - \frac{1}{\zeta-\zeta^{-1}}\sum_{l=0}^{\infty}(\zeta^{l+1}-\zeta^{-l-1})x^l = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\left(l+1-\frac{\zeta^{l+1}-\zeta^{-l-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\right)x^l,$$

где ζ, ζ^{-1} — корни трехчлена $x^2+1+(r-2)x$ (они при $0 < r \leqslant 2$ комплексно сопряжены). Осталось заметить, что

$$\left|\frac{\zeta^{l+1}-\zeta^{-l-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}\right| = |\zeta^l + \zeta^{l-2} + \dots + \zeta^{-l}| \leqslant l+1,$$

поэтому для (действительных!) коэффициентов ряда $rxv(x)$ верно неравенство

$$l+1-\frac{\zeta^{l+1}-\zeta^{-l-1}}{\zeta-\zeta^{-1}} \geqslant 0,$$

а значит, и коэффициенты ряда $v(x)$ неотрицательны. □

Рассмотрим операторы $Q_k = q_k(M)$, $R_k = r_k(M)$ и произвольную неотрицательную гармоническую функцию g.

Лемма 5. *$R_k g \geqslant 0$.*

Доказательство. Имеем

$$R_k g = P_k g + (M+r)(2n-2-M)Q_k g = \\ = P_k g + (M+r)(X_2 + X_2^{-1} + \dots + X_n + X_n^{-1})Q_k g.$$

Заметим, что $P_i g \geqslant 0$ из леммы 1, а поэтому $Q_k g \geqslant 0$ из леммы 4. Тогда применение оператора $(M+r)$ к гармонической неотрицательной функции $(X_2+X_2^{-1}+\dots+X_n+X_n^{-1})Q_k g$ дает снова неотрицательную функцию. Отсюда следует утверждение леммы. □

Завершим доказательство теоремы. Итак, мы предположили, что $r > 0$. Тогда $0 < \varphi = \arccos\frac{2-r}{2} \leqslant \pi$, и существует такое k, что $\pi/2 < k\varphi \leqslant \pi$. При этом k имеем $p_k(-r) = 2\cos k\varphi < 0$ согласно лемме 2. Кроме того, из леммы 3 получаем $p_k(2n-2) \geqslant 2$.

Подставив в (2) $t = 2(n-1)$ и $t = -r$, получаем

$$r_k(2(n-1)) = p_k(2(n-1)), \quad r_k(-r) = p_k(-r),$$

откуда

$$r_k(t) = p_k(2(n-1)) + (x - 2(n-1))\frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{2(n-1)+r}.$$

Тогда

$$R_k g = \frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{2(n-1)+r} Mg + \\ + \left(p_k(2(n-1)) - 2(n-1)\frac{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)}{2(n-1)+r}\right) g \geqslant 0,$$

причем коэффициент при M в этом выражении положителен. Разделив на этот коэффициент, получаем

$$\left(M + p_k(2(n-1))\frac{2(n-1)+r}{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)} - 2(n-1)\right) g \geqslant 0.$$

Однако

$$p_k(2(n-1))\frac{2(n-1)+r}{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)} - 2(n-1) = \\ = (2(n-1)+r)\frac{p_k(2(n-1))}{p_k(2(n-1)) - p_k(-r)} - 2(n-1) < \\ < 2(n-1) + r - 2(n-1) = r;$$

неравенства выполняются, ибо $p_k(2(n-1)) \geqslant 2 > 0 > p_k(-r)$. Получаем противоречие с выбором r. Значит, $r = 0$, откуда следует неравенство (1), из которого, как было показано выше, и следует теорема.

Peter Scholze
e-mail: `Peter.Scholze@web.de`