Об одном свойстве интегрируемой функции

М. Аппельбаум В. Журавлёв П. Самовол

В этой заметке приводится решение задачи 9.10 из задачника «Математического просвещения».

На математических соревнованиях самого разного уровня встречаются задачи с несколько парадоксальной формулировкой. Например, в книге [1, с. 105] находим:

Задача 1. Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий доход превышал доход, а в целом за год его доход превысил расход?

(В формулировке А. А. Егорова задача звучит более интригующе: «как долго может законно существовать бизнес-сообщество, если по итогам работы за любые 5 месяцев у сообщества есть прибыль, но за год в налоговую инспекцию сообщество подаёт отчёт о том, что прибыли нет и налоги платить не из чего...»)

Второй пример предлагался на Международной Математической Олимпиаде (IMO) 1977 года в Белграде (6 очков), см. [2, с. 5, №19.2]:

Задача 2. В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна. Найти набольшее число членов данной последовательности.

В Шестнадцатом Международном Турнире городов (1994–1995, осенний тур) находим задачу:

Задача 3. (А. Канель-Белов) Периоды двух последовательностей — 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать? (Период последовательности $\{a_n\}$ — это наименьшее натуральное число p такое, что для любого номера n выполняется равенство $a_n = a_{n+p}$).

Математическую идею всех данных задач можно сформулировать так.

Для последовательности действительных чисел, записанных в строчку, выполняются следующие условия $(*)$:

1. сумма любых m идущих подряд членов отрицательна;

2. сумма любых n идущих подряд членов положительна.

Чему равно $N_{\max}$ — максимальное число членов данной последовательности?

В этой статье мы рассмотрим ещё одну версию данной проблемы.

Задача 4. Существует ли такая непрерывная функция $y = f(x)$, что любой определённый интеграл от этой функции по любому отрезку длины $m = 3$ отрицателен, а по любому отрезку длины $n = 5$ — положителен?

Такие функции существуют. Аналитическое выражение одной из них и примерная схема ее графика приведены ниже на рисунке 1. График симметричен относительно прямой $x = 3$. Каждая из частей графика также симметрична: первая относительно прямой $x = 1{,}5$, вторая (правая) часть симметрична относительно прямой $x = 4,5$. Кроме того, для $x \in [0; 3]$ выполняется равенство $f(x) = f(x + 3)$ (периодичность).

Поэтому

$$\int\limits_a^{a+3} f(x)\,dx = \int\limits_a^3 f(x)\,dx + \int\limits_3^{a+3} f(x)\,dx = \int\limits_a^3 f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^3 f(x)\,dx.$$

(Здесь и далее мы предполагаем, что равенства выполняются для тех значений параметров, при которых отрезки интегрирования попадают в область определения функции.)

$$f(x) = \begin{cases} -6, \text{ при } 0 \leqslant x < 1, \\ 180x - 186, \text{ при } 1 \leqslant x < 1{,}1, \\ 12, \text{ при } 1{,}1 \leqslant x < 1{,}9, \\ -180x + 354, \text{ при } 1{,}9 \leqslant x < 2, \\ -6, \text{ при } 2 \leqslant x < 3, \\ -6, \text{ при } 3 \leqslant x < 4, \\ 180x - 726, \text{ при } 4 \leqslant x < 4{,}1, \\ 12, \text{ при } 4{,}1 \leqslant x < 4{,}9, \\ -180x + 894, \text{ при } 4,9 \leqslant x < 5, \\ -6, \text{ при } 5 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$

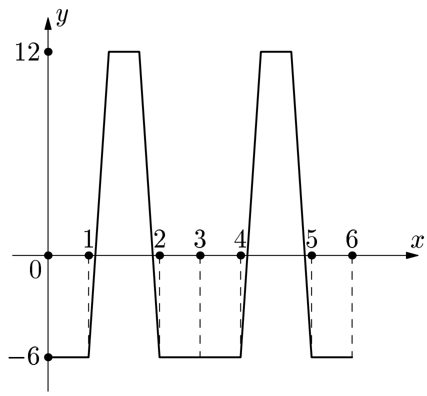

Рис. 1.

С другой стороны, функция $f(x)$ принимает одно и то же значение -6 на отрезках $[0;1]$ и $[5;6]$. Поэтому

$$\int\limits_a^{a+5} f(x)\,dx = \int\limits_0^5 f(x)\,dx \qquad (0 \leqslant a \leqslant 1).$$

Интеграл от линейной функции равен произведению длины отрезка интегрирования на полусумму значений функции в концах отрезка интегрирования. Поэтому

$$\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 1\cdot(-6) + 0{,}1\cdot\frac{-6+12}{2} + 0{,}8\cdot 12 + 0{,}1\cdot\frac{-6+12}{2} + 1\cdot(-6) = \\ = -12 + 9{,}6 + 2\cdot 0{,}3 = -1{,}8 < 0,$$

а

$$\int\limits_0^5 f(x)\,dx = -1{,}8 + 1\cdot(-6) + 2\cdot 0{,}3 + 9{,}6 = 2{,}4 > 0.$$

Таким образом, для данной функции любой определенный интеграл по отрезку длины 3 отрицательный, а по отрезку длины 5 — положительный.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Интегрируемая на отрезке* $[0,c]$ *функция* $f(x)$ *такова, что любой интеграл по отрезку длины* n *положителен, а по отрезку длины* m *отрицателен,* $c > m > n > 0$. *Тогда*

a) $c < m + n$;

b) если m *и* n *соизмеримы, т. е.* $m/n = q/p$, *где* p, q *— взаимно простые целые числа, то* $c < m + n - m/q$.

Доказательство а): предположим, что $c \geqslant m+n$. Обозначим через $F(x)$ первообразную функции $f(x)$, а через $\Phi(x)$ — первообразную функции $F(x)$. Используя формулу Ньютона – Лейбница и учитывая, что интеграл от положительной функции положителен, от отрицательной отрицателен, получаем противоречие:

$$0 < \int\limits_0^m \left[\int\limits_x^{x+n} f(y)\,dy\right] dx = \int\limits_0^m (F(x+n) - F(x))\,dx = \\ = \Phi(m+n) - \Phi(m) - \Phi(n) + \Phi(0) = \\ \int\limits_0^n (F(y+m) - F(y))\,dy = \int\limits_0^n \left[\int\limits_y^{y+m} f(x)\,dx\right] dy < 0.$$

Итак, $c < m + n$.

Доказательство b). Полагаем $d = m/q = n/p$, так что $m = qd$, $n = pd$. Обозначим

$$S_{d,k} = \int\limits_{(k-1)d}^{kd} f(x)\,dx, \qquad k \in \mathbb{N}, d > 0, kd \leqslant c.$$

Рассмотрим последовательность

$$S_{d,1}, S_{d,2}, S_{d,3}, \dots, S_{d,p+q-1}. \tag{2}$$

Согласно условию теоремы эта последовательность удовлетворяет следующим свойствам:

1. сумма любых подряд идущих p ее членов положительна;

2. сумма любых подряд идущих q ее членов отрицательна.

Но, как следует из приводимой ниже леммы, последовательностей с такими свойствами не существует (максимальная длина такой последовательности равна $p + q - (p, q) - 1$). Приходим к противоречию.

Теперь сформулируем и докажем упомянутую лемму.

Лемма 1. *Будем говорить, что последовательность действительных чисел удовлетворяет свойству $*(n, m)$, если сумма любых n идущих подряд членов последовательности положительна, а сумма любых m идущих подряд членов последовательности отрицательна.*

Если последовательность a_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ удовлетворяет свойству $*(n, m)$, то $N \leqslant m + n - d - 1$, где $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель чисел n и m.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $m > n$. Очевидно, что при выполнении условия леммы числа m и n не могут быть кратны друг другу. Поэтому $n > d = (m, n)$. Обозначим $n = n_1 d$, $m = m_1 d$, $(m_1, n_1) = 1$.

Будем доказывать лемму от противного. Предположим, что в последовательности $n + m - d = d(m_1 + n_1 - 1)$ членов. Разобъем последовательность на $m_1 + n_1 - 1$ групп по d чисел в каждой группе. Согласно условию леммы получаем, что сумма чисел в любых m_1 группах положительна, а сумма чисел в любых n_1 группах — отрицательна. По сути дела мы свели доказательство к частному случаю леммы, когда n, m взаимно просты. Поэтому в дальнейшем рассуждении мы считаем, что $(n, m) = 1$ и говорим о членах последовательности длины $n + m - 1$.

Рассмотрим любые $m - n$ подряд идущих членов последовательности. Кроме них последовательность содержит $(m + n - 1) - (m - n) = 2n - 1$ членов. Так как число $2n - 1$ нечетное, то при любом разбиении этого числа на два слагаемых одно из них будет не меньше n. Так что слева или справа от выбранной группы из $m-n$ членов находится еще не менее n членов.

Сумма любых n подряд идущих членов последовательности положительна. Если добавить n членов к выбранной группе из $m-n$ членов последовательности, то сумма полученного набора из m подряд идущих членов последовательности будет отрицательна. Поэтому сумма выбранных $m-n$ членов должна также быть отрицательной.

Итак, для взаимно простых m, n мы показали, что если последовательность удовлетворяет свойству $*(n,m)$, то она также удовлетворяет свойству $*(n,m-n)$. Далее действуем аналогично, заменяя бо́льшее из чисел m, n на их разность. Получаем такую же последовательность пар чисел, как в алгоритме Евклида. Поскольку исходные числа n, m — взаимно простые, приходим к тому, что последовательность удовлетворяет свойству $*(q,1)$, что невозможно (если все члены последовательности отрицательны, то любая их сумма также будет отрицательной). $\square$

Замечание 1. Таким образом, мы видим, что описанная в начале статьи математическая идея может принимать самые разные формы. Вместе с тем переход в «интегральную тематику» позволяет рассмотреть случай несоизмеримых пределов интегрирования.

Оценки в теореме 1 нельзя улучшить. Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0;c]$, удовлетворяет интегральному свойству $*(n,m)$, если интеграл от $f(x)$ по любому отрезку длины n положителен, а по любому отрезку длины m отрицателен.

Теорема 2. 1) *Если m и n соизмеримы, т. е. $m/n = q/p$, где p, q — взаимно простые целые числа, то для любого $\varepsilon > 0$, $m+n-m/q > \varepsilon$, можно построить интегрируемую функцию $f(x)$ на отрезке $[0, m+n-m/q-\varepsilon]$, удовлетворяющую интегральному свойству $*(m,n)$.*

2) *Если m и n несоизмеримы, то для любого $\varepsilon > 0$, $m+n > \varepsilon$, можно построить интегрируемую функцию $f(x)$ на отрезке $[0, m+n-\varepsilon]$, удовлетворяющую интегральному свойству $*(m,n)$.*

Для доказательства теоремы мы будем строить функции, удовлетворяющие усиленному интегральному свойству $*(m,n)$. А именно, *функцией типа* (L, m, S_m, n, S_n) назовем функцию, определенную на отрезке $[0;L]$, и такую, что интеграл от этой функции по любому отрезку длины m равен S_m, а по любому отрезку длины n равен S_n.

Замечание 2. Если построена функция типа (L, m, S_m, n, S_n) такая, что L, m, n — целые, $S_m < 0$, $S_n > 0$, то интегралы от этой функции по отрезкам $[k;k+1]$ предоставляют пример «парадоксальной» последовательности (см. [4]). В частности, из теоремы 2 следует, что оценка в лемме 1 точна. Приводимое ниже доказательство теоремы 2 является прямым обобщением алгоритма построения «парадоксальных» последовательностей из [4].

Лемма 2. *Пусть $L < m+n$ и для любых A, B существует функция типа (L, m, A, n, B), $m > n$. Тогда для любых A, B существуют функции типов $(L+m, m, A, n+m, B)$ и $(L+n, m, A, n+m, B)$.*

Доказательство. Пусть f имеет тип (L, m, A, n, B). Тогда функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } 0 \leqslant x < m, \\ f(x-m), & \text{если } m \leqslant x < L+m, \end{cases}$$

имеет тип $(L+m, m, A, n+m, A+B)$. Действительно, если $b-a=m$, $a<m$, то

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^m g(x)\,dx + \int\limits_m^b g(x)\,dx = \int\limits_a^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{b-m} f(x)\,dx = A,$$

а если $b-a=n+m$, то из $L<m+n$ следует, что $a<m$, а значит

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{b-m} f(x)\,dx = \int\limits_a^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{a+n} f(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_a^m f(x)\,dx + \int\limits_a^{a+n} f(x)\,dx = A+B.$$

Докажем, что функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x-n+m), & \text{если } 0 \leqslant x < n, \\ f(x-n), & \text{если } n \leqslant x < L+n, \end{cases}$$

имеет тип $(L+n, m, A, n+m, A+B)$. Если $b-a=m$, $a<n$, то

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^n g(x)\,dx + \int\limits_n^b g(x)\,dx = \int\limits_{a+m-n}^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{b-n} f(x)\,dx = A,$$

а если $b-a=n+m$, то из $L<m+n$ следует, что $a<n$, а значит

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_{a+m-n}^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{b-n} f(x)\,dx = \int\limits_{a+m-n}^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{a+m} f(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{a+m-n}^{a+m} f(x)\,dx + \int\limits_{a+m}^m f(x)\,dx + \int\limits_0^{a+m} f(x)\,dx = B+A.$$

Теперь лемма вытекает из того факта, что отображение $(A, B) \mapsto (A, A+B)$ взаимно однозначно. $\square$

Доказательство теоремы 2. Для $n < m < L = 2n - \delta$ зададим функцию f типа (L, m, A, n, B) явной формулой:

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } 0 \leqslant x < n - \delta \text{ или } n \leqslant x \leqslant L, \\ a, & \text{если } n - \delta \leqslant x < n. \end{cases} \tag{3}$$

Интеграл от f по любому отрезку длины n равен $B = \delta a + (n - \delta)b$, а по любому отрезку длины m равен $A = \delta a + (m - \delta)b$. Получающаяся система линейных уравнений невырождена и поэтому имеет единственное решение при любых A, B.

Преобразования, описанные в лемме 2, одинаково меняют сумму $m+n$ и длину L. Для функции из (3) разность $m + n - L$ равна $m - n + \delta$.

Поэтому, многократно применяя лемму 2 и используя функцию из (3), получаем следующее утверждение: если пара (m, n) переходит в пару (m_ℓ, n_ℓ), $n_\ell < m_\ell < 2n_\ell - \varepsilon$, после нескольких преобразований вида

$$(m, n) \mapsto (m - n, n) \text{ или } (m, n) \mapsto (m, m - n), \tag{4}$$

то существуют функции типа $(n + m - (m_\ell - n_\ell) - \varepsilon, n, A, m, B)$ для любых A, B и $0 < \varepsilon < n + m - (m_\ell - n_\ell)$.

Применим это рассуждение для доказательства пункта 1) теоремы. Положим $d = m/q = n/p$, очевидно, что $n = pd$ и $m = qd$. Выберем натуральное число N, такое что $0 < d/N < \varepsilon$. Рассмотрим натуральные числа $m_1 = Nq$ и $n_1 = Np$. Очевидно, что $N = (m_1, n_1)$. Построим функцию $y = f_1(x)$ типа $(m_1 + n_1 - N - 1, m_1, A, n_1, B)$. В качестве искомой достаточно рассмотреть функцию $y = f(x) = f_1(dx/N)$, определенную на отрезке

$$\left[0; \frac{m_1 + n_1 - N - 1}{N} d\right] = \left[0; m + n - \frac{m}{q} - \frac{d}{N}\right] \supset \left[0; m + n - \frac{m}{q} - \varepsilon\right].$$

Аналогично доказывается пункт 2) теоремы. В этом случае в силу несоизмеримости m, n последовательность преобразований (4) продолжается неограниченно:

$$(m, n) \mapsto (m_1, n_1) \mapsto (m_2, n_2) \mapsto \ldots \mapsto (m_\ell, n_\ell) \mapsto \ldots ,$$

причем $m_\ell + n_\ell \to 0$ при $\ell \to \infty$ и сколь угодно часто выполняется неравенство $n_\ell < m_\ell < 2n_\ell$. Выбрав такое ℓ, что $m_\ell + n_\ell < \varepsilon/2$ и $n_\ell < m_\ell < 2n_\ell$, заключаем, что так что существуют функции типа $(n + m - \varepsilon, n, A, m, B)$ для любых A, B и $0 < \varepsilon < n + m$. $\square$

Замечание 3. Построенные в доказательстве ступенчатые функции можно без труда превратить в непрерывные, удовлетворяющие аналогичным условиям.

В заключение предлагаем обобщение на многомерный случай как задачу для самостоятельного исследования.

Задача. Для каких областей Φ_1, Φ_2, Φ_3 существует непрерывная функция f с областью определения Φ_3 и такая, что интеграл от f по любому параллельному переносу Φ_1, лежащему в Φ_3, положителен, а интеграл от f по любому параллельному переносу Φ_2, лежащему в Φ_3, отрицателен. Рассмотрите случай, когда Φ_1 — прямоугольник, а Φ_2 — круг.

Авторы выражают благодарность профессору Канель-Белову (Московский Институт Открытого Образования) за участие в обсуждении этой проблемы.

Список литературы

[1] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. *Заочные математические олимпиады.* М.: Наука, 1997. С. 105, 108–109.

[2] *Международные математические олимпиады.* Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. М.: Дрофа, 2000. С. 5, 34–35.

[3] Произволов В., Спивак А. *Усреднение по окружности* // Квант, 1998. №1, с. 29–31.

[4] Самовол П., Аппельбаум М., Жуков А. *Как построить парадоксальный пример* // Квант, 2005. №1, с. 35–37.

[5] Международный Турнир городов, 1994–1995 (Осенний тур). `http://www.turgor.ru/16/turnir16.php#turnir16otm`

Dr. Peter Samovol, Ben-Gurion University of Negev, Beer-Sheva, Israel Kaye Academic College of Education, Beer-Sheva, Israel
E-mail: `Pet12@012.net.il`

Dr. Mark Applebaum, Kaye Academic College of Education, Beer- Sheva, Israel
E-mail: `Amark@012.net.il`

Журавлёв Валерий Михайлович (к.ф.-м.н.), ОАО «Сибирско-Уральская нефтегазохимическая компания», г. Москва, Россия
E-mail: `Zhuravlev@sibur.ru`