

# О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя

Е. Д. Куланин

В статье рассматриваются вопросы, затронутые в [3], а также приводится решение задачи 8.4 из задачника «Математического просвещения».

## 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Напомним сначала некоторые определения. Пусть  $P$  — точка в плоскости треугольника  $ABC$ ,  $A_1, B_1, C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно. Тогда треугольник  $A_1B_1C_1$  называется педальным треугольником точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Прямые, проходящие через вершину данного угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла, называются изогональными относительно этого угла. Окружность, на которой лежат середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков от вершин до точки пересечения высот (ортоцентра), называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек этого треугольника.

Приведем формулировки тех теорем из [3], которые понадобятся нам в этой статье. Желающие могут найти их доказательства в [3], для чего в скобках приводятся номера этих теорем, которые они имеют в [3].

**ТЕОРЕМА 1 (7).** Пусть  $P$  — точка, не лежащая на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда прямые, изогональные соответственно прямым  $PA, PB, PC$  относительно углов  $A, B, C$  этого треугольника, пересекаются в одной точке  $P'$ .

Точки  $P$  и  $P'$  называются изогонально сопряженными точками относительно треугольника  $ABC$  или просто изогональными точками.

В дальнейшем мы покажем, что если точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то прямые, изогональные прямым  $PA, PB, PC$  относительно углов  $A, B, C$ , параллельны. Легко видеть, что центр описанной окружности треугольника и точка пересечения его высот изогонально сопряжены.

ТЕОРЕМА 2 (9). Пусть  $P$  и  $P'$  — точки, изогонально сопряженные относительно треугольника  $ABC$ , а  $A_1B_1C_1$  и  $A'_1B'_1C'_1$  — педальные треугольники этих точек. Тогда вершины треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A'_1B'_1C'_1$  лежат на одной окружности.

Так как центр  $O$  описанной окружности треугольника и точка  $H$  пересечения его высот изогональны, то из теоремы 2 сразу же вытекает, что середины сторон произвольного треугольника и основания его высот лежат на одной окружности. Обозначим через  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  высоты непрямоугольного треугольника  $ABC$ . Тогда треугольники  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  подобны треугольнику  $ABC$  с коэффициентами подобия  $|\cos A|$ ,  $|\cos B|$ ,  $|\cos C|$  соответственно.

Таким образом, треугольники  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  являются уменьшенными копиями треугольника  $ABC$ , поэтому можно рассматривать точки, одинаково расположенные относительно подобных треугольников  $ABC$ ,  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ .

ТЕОРЕМА 3 (10). Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — проекции точки  $P$  на стороны (или продолжения сторон)  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ ;  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки, симметричные  $P$  относительно середин сторон  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$ ;  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  — основания высот  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  треугольника  $ABC$ . Тогда точки  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  одинаково расположены по отношению к треугольникам  $ABC$ ,  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — проекции точки  $P$  на стороны (или продолжения сторон)  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ ;  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  — основания высот  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  треугольника  $ABC$ . Тогда точки  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , одинаково расположенные с точкой  $P$  по отношению к треугольникам  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ ,  $ABC$ , совпадают с ортоцентрами треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$ ,  $CA_1B_1$ .

СЛЕДСТВИЕ 2 (5). Пусть  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  — основания высот  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  треугольника  $ABC$ ; точки  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  одинаково расположены по отношению к треугольникам  $ABC$ ,  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  соответственно. Тогда треугольник  $P_1P_2P_3$  равен педальному треугольнику  $A_1B_1C_1$  точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ , причем стороны треугольников  $P_1P_2P_3$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно параллельны.

ТЕОРЕМА 4 (11). Пусть  $P$  — произвольная точка в плоскости треугольника  $ABC$ , не лежащая на его описанной окружности;  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  — его высоты, пересекающиеся в точке  $H$ ;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  — середины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ;  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки, одинаково расположенные с  $P$  относительно треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ ,  $ABC$  соответственно. Тогда прямые  $E_1P_1$ ,  $E_2P_2$ ,  $E_3P_3$  пересекаются в такой точке  $K$

окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

## 2. ПРЯМЫЕ СИМСОНА

Рассмотрим теперь конфигурацию, изображенную на рис. 1. Проведем через ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  прямую, которая пересечет описанные окружности треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  в точках  $P_a, P_b, P_c$  соответственно.

Так как  $\angle P_aHH_2 = \angle P_cHH_2 = \angle P_bHB$ , а  $\angle AH_2H_3 = \angle CH_2H_1 = \angle H_1BH_3$ , то точки  $P_a, P_b, P_c$  одинаково расположены относительно подобных треугольников  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$ . Пусть  $P$  — точка, одинаково расположенная с точками  $P_a, P_b, P_c$  относительно треугольников  $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$ ;  $H_a, H_b, H_c$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно. Тогда согласно следствию 1 точки  $P_b, P_c, P_a$  совпадают с ортоцентрами

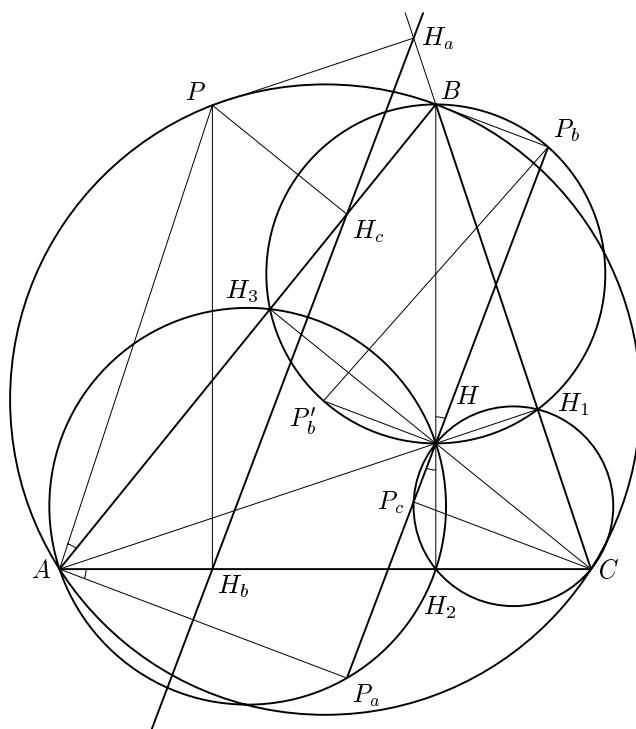


Рис. 1.

треугольников  $H_aBH_c$ ,  $H_aCH_b$ ,  $H_cAH_b$  соответственно, т. е.  $VP_b \perp H_aH_c$ ,  $CP_c \perp H_aH_b$ ,  $AP_a \perp H_bH_c$ . Но  $\angle VP_bH = \angle CP_cH = \angle AP_aH = 90^\circ$  как вписанные углы, опирающиеся на диаметры описанных окружностей треугольников  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ ,  $AH_2H_3$ , поэтому  $H_aH_c \parallel P_bH$ ,  $H_aH_b \parallel P_cH$ ,  $H_bH_c \parallel P_aH$ . Вспомнив, что точки  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$ ,  $H$  лежат на одной прямой, получаем, что и точки  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H_c$  также лежат на одной прямой. Кроме того,  $H_aH_b = P_aP_b$ ,  $H_bH_c = P_bP_c$ ,  $H_cH_a = P_cP_a$  как противоположные стороны параллелограммов  $P_aH_bH_aP_b$ ,  $P_cH_bH_cP_b$ ,  $P_aH_cH_aP_c$ . Таким образом, следствие 2 справедливо и в случае вырожденного педального треугольника. Итак, мы пришли к следующему результату: основания перпендикуляров, опущенных из точки, взятой на описанной окружности треугольника, на его стороны или продолжения сторон, лежат на одной прямой.

Эта прямая называется прямой Симсона.

**ТЕОРЕМА 5.** Прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через середину отрезка  $PH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вернемся к нашей конфигурации, изображенной на рис. 1. Мы установили, что прямая  $P_aP_bP_c$  параллельна прямой Симсона точки  $P$ , одинаково расположенной с точками  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  относительно треугольников  $ABC$ ,  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$  соответственно, поэтому согласно теореме 3 точки  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  симметричны точке  $P$  относительно середин отрезков  $H_aH_b$ ,  $H_bH_c$ ,  $H_cH_a$ . Другими словами, прямая Симсона  $H_bH_cH_a$  точки  $P$  проходит через середины отрезков  $PP_a$ ,  $PP_b$ ,  $PP_c$ , а, значит, и через середину отрезка  $PH$  (напомним, что прямая  $P_aP_bP_c$  проходит через  $H$ ).  $\square$

Далее, пусть  $P'_b$  — точка, диаметрально противоположная  $P_b$  относительно описанной окружности треугольника  $BH_3H_1$ . Тогда  $\angle P'_bHP_b = 90^\circ$ , т. е.  $P'_bH \perp P_bH$ , но  $P'_bH$  параллельна прямой Симсона точки  $P'$ , диаметрально противоположной точке  $P$  относительно описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Таким образом, получено

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны.

Пусть точка  $P$  движется против часовой стрелки по описанной окружности треугольника  $ABC$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда угловые меры дуг  $BP$  и  $BP_b$  равны и  $\angle BHP_b = \frac{1}{2} \angle BP_b = \frac{1}{2}\omega t$ . Это означает, что прямая  $P_aP_cHP_b$  вращается вокруг точки  $H$  по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью  $\omega/2$ . Прямая Симсона точки  $P$ , параллельная

прямой  $P_aP_b$ , также вращается с угловой скоростью  $\omega/2$  по часовой стрелке вокруг некоторого переменного центра вращения. Другими словами, если радиус  $OP$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то прямая Симсона точки  $P$  вращается с постоянной угловой скоростью  $-\omega/2$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Прямая Симсона точки  $P$ , лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$ , перпендикулярна прямым, симметричным прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  относительно биссектрис углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника  $ABC$  соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проведем отрезки  $AP_a$ ,  $BP_b$ ,  $CP_c$ . Так как отрезки  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  являются диаметрами описанных окружностей треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ , то  $\angle AP_aH = \angle BP_bH = \angle CP_cH = 90^\circ$  и поэтому отрезки  $AP_a$ ,  $BP_b$ ,  $CP_c$  параллельны. Но поскольку точки  $P$ ,  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  одинаково расположены относительно треугольников  $ABC$ ,  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ , то прямые  $AP_a$ ,  $BP_b$ ,  $CP_c$  симметричны прямым  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  относительно биссектрис углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника  $ABC$ . Осталось только вспомнить, что прямая  $P_aP_cHP_b$  параллельна прямой Симсона точки  $P$ .  $\square$

Используя определение изогональных прямых, предложение 2 можно переформулировать следующим образом:

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Прямая Симсона точки  $P$ , лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$ , перпендикулярна прямым, изогональным прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  относительно углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника  $ABC$ .

Заметим, что попутно мы доказали, что для точки  $P$  описанной окружности треугольника  $ABC$  прямые, изогональные прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  относительно углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника  $ABC$ , параллельны. Будем считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Тогда можно сказать, что точка  $P'$ , изогональная точке  $P$ , лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$ , бесконечно удалена. Верно и обратное, т. е. точка  $P$ , изогональная бесконечно удаленной точке  $P'$ , относительно треугольника  $ABC$ , лежит на описанной окружности этого треугольника. Другими словами, справедливо

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.** Прямые  $\ell_a$ ,  $\ell_b$ ,  $\ell_c$ , изогональные параллельным прямым  $\ell'_a$ ,  $\ell'_b$ ,  $\ell'_c$  относительно треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности этого треугольника.

Непосредственным следствием предложения 4 является

**ТЕОРЕМА 6.** Пусть прямая  $\ell$ , проходящая через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , одинаково расположена с прямыми  $\ell_a$ ,

$\ell_b, \ell_c$  относительно треугольников  $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$ . Тогда прямые  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера этого треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $E$  — центр окружности Эйлера, а  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ;  $E_1, E_2, E_3$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$ . Проведем через точку  $E$  прямую  $\ell_1$ , параллельную  $\ell$ , а через точки  $E_1, E_2, E_3$  — прямые  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$ , одинаково расположенные с прямой  $\ell$  относительно треугольников  $ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$ . Поскольку треугольники  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2$  при симметрии относительно соответствующих биссектрис треугольника  $ABC$  переходят в треугольники, гомотетичные треугольнику  $ABC$ , то прямые  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  изогональны относительно треугольника  $E_1E_2E_3$  прямым  $\ell'_a, \ell'_b, \ell'_c$ , параллельным прямой  $\ell_1$  и проходящим через вершины треугольника  $E_1E_2E_3$ . Поэтому в силу предложения 4 прямые  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$  пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника  $E_1E_2E_3$ , совпадающей с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 7. Пусть  $P$  — произвольная точка описанной окружности треугольника  $ABC$ ;  $AH_1, BH_2, CH_3$  — его высоты, пересекающиеся в точке  $H$ ;  $E_1, E_2, E_3$  — середины отрезков  $AH, BH, CH$ ;  $P_1, P_2, P_3$  — точки, одинаково расположенные с  $P$  относительно треугольников  $AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC$  соответственно. Тогда прямые  $E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3$  пересекаются в такой точке  $K$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , через которую проходит прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через  $A_1, B_1, C_1$  проекции точки  $P$  на стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BCA = \gamma$  (рис. 2). Так как  $P_2$  и  $P_3$  — ортоцентры треугольников  $A_1BC_1$  и  $B_1CA_1$  (см. следствие 1), то

$$\begin{aligned} \angle P_2A_1P_3 &= \angle P_2A_1C + \angle P_3A_1C = 90^\circ - \angle C_1P_2A_1 + 90^\circ - \gamma = \\ &= 180^\circ - \angle C_1P_2A_1 - \gamma. \end{aligned}$$

Но  $\angle C_1P_2A_1 = \angle C_1PA_1$  как противоположные углы параллелограмма  $PA_1P_2C_1$ , а  $\angle C_1PA_1 + \angle C_1BA_1 = 180^\circ$ , поскольку четырехугольник  $PA_1BC_1$  вписанный ( $\angle PA_1B + \angle PC_1B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ). Поэтому

$$\begin{aligned} \angle P_2A_1P_3 &= (180^\circ - \angle C_1P_2A_1) - \gamma = \angle C_1BA_1 - \gamma = \\ &= 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha = \angle E_2KE_3 = \angle P_2KP_3. \end{aligned}$$

Из равенства углов  $P_2KP_3$  и  $P_2A_1P_3$  следует, что точки  $P_2, K, A_1, P_3$  лежат на одной окружности. Аналогично показывается, что точки  $P_3, B_1, P_1, K$  также лежат на одной окружности.

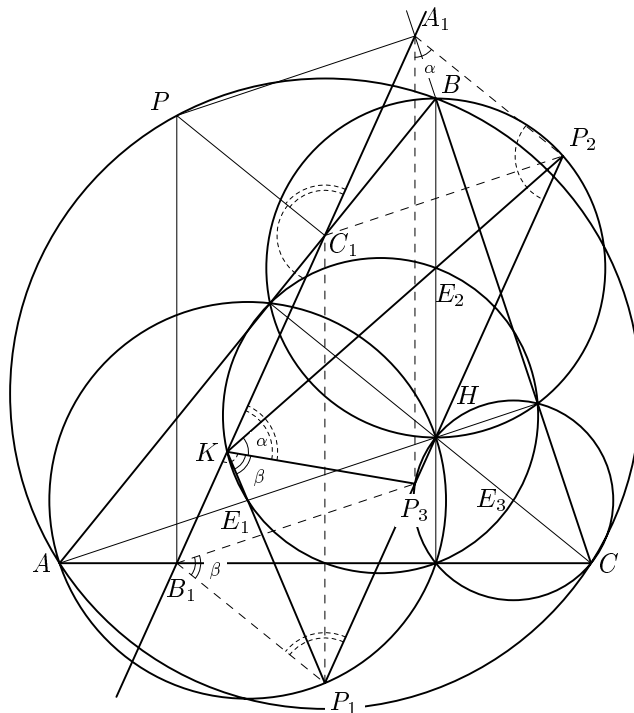


Рис. 2.

Далее, так как точка  $C_1$  лежит на прямой Симсона  $A_1B_1$ , то  $\angle B_1C_1P + \angle PC_1A_1 = 180^\circ$ , но  $\angle B_1C_1P = \angle A_1P_2P_3$ ,  $\angle A_1C_1P = \angle B_1P_1P_3$  как углы с соответственно параллельными сторонами, а из вписанных четырехугольников  $A_1P_2P_3K$  и  $B_1P_1P_3K$  находим

$$\begin{aligned} \angle P_3KA_1 &= 180^\circ - \angle A_1P_2P_3 = 180^\circ - \angle B_1C_1P = \angle PC_1A_1, \\ \angle P_3KB_1 &= 180^\circ - \angle B_1P_1P_3 = 180^\circ - \angle A_1C_1P = \angle PC_1B_1. \end{aligned}$$

Окончательно получаем  $\angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1 = \angle PC_1A_1 + \angle PC_1B_1 = 180^\circ$ , откуда следует, что точка  $K$  лежит на прямой Симсона  $A_1B_1$ .  $\square$

Прямые Симсона можно считать описанными окружностями бесконечно большого радиуса вырожденных pedalных треугольников, поэтому теорема 7 является аналогом теоремы 4, и, более того, эти теоремы можно объединить в одну:

**ТЕОРЕМА 8.** Пусть  $P$  — произвольная точка в плоскости треугольника  $ABC$ ;  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  — его высоты, пересекающиеся в точке  $H$ ;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  — середины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ;  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки, одинаково расположенные с  $P$  относительно треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,

$CH_1H_2$ ,  $ABC$  соответственно. Тогда прямые  $E_1P_1$ ,  $E_2P_2$ ,  $E_3P_3$  пересекаются в такой точке  $K$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

Теорему 8 можно переформулировать следующим образом:

**ТЕОРЕМА 9.** Пусть  $P$  — произвольная точка в плоскости треугольника  $ABC$ ;  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  — его высоты, пересекающиеся в точке  $H$ ;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  — середины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ;  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ;  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$  — прямые, параллельные прямой  $OP$  и проходящие через точки  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  соответственно;  $\ell'_1$ ,  $\ell'_2$ ,  $\ell'_3$  — прямые, изогональные  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$  относительно треугольника  $E_1E_2E_3$ . Тогда прямые  $\ell'_1$ ,  $\ell'_2$ ,  $\ell'_3$  пересекаются в такой точке  $K$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

**ТЕОРЕМА 10.** Прямые Симсона диаметрально противоположных точек  $P$  и  $P'$  перпендикулярны и пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , причем вторые точки пересечения этих прямых с окружностью Эйлера являются концами ее диаметра, параллельного  $PP'$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно теореме 7 прямые Симсона диаметрально противоположных точек  $P$  и  $P'$  пересекаются в точке  $K$ , лежащей на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

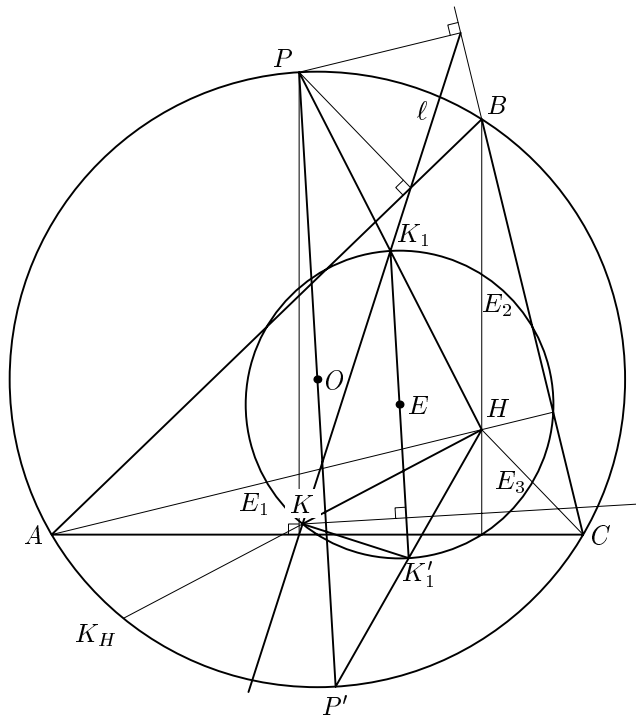
Но, как было установлено выше (см. предложение 1), прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны, поэтому  $K_1K'_1$  — диаметр окружности Эйлера, где  $K_1$  и  $K'_1$  — вторые точки пересечения прямых Симсона точек  $P$  и  $P'$  с окружностью Эйлера (рис. 3).

Рассмотрим прямую Симсона  $\ell$  точки  $P$ . Точка  $K$  пересечения этой прямой с окружностью Эйлера совпадает с точкой пересечения прямых  $E_1P_1$ ,  $E_2P_2$ ,  $E_3P_3$ , одинаково расположенных с прямой  $OP$  относительно треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_3H_1$ ,  $CH_1H_2$ ,  $ABC$  ( $O$  — как всегда центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ). Вторая точка  $K_1$  пересечения прямой Симсона  $\ell$  точки  $P$  с окружностью Эйлера совпадает согласно теореме 5 с серединой отрезка  $PH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

Аналогично, точка  $K'_1$  совпадает с серединой отрезка  $P'H$ , и, таким образом, диаметр  $K_1K'_1$  окружности Эйлера является средней линией треугольника  $PHP'$  и, следовательно, параллелен диаметру  $PP'$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Пусть  $P'$  — бесконечно удаленная точка, изогональная точке  $P$ . Тогда точка  $K_1$ , совпадающая с серединой отрезка  $PH$ , изогонально сопряжена с  $P'$  относительно треугольника  $E_1E_2E_3$  (см.





**Рис. 3.**

предложения 2–4). Тогда, если считать прямую Симсона  $\ell$  точки  $P$  общей педальной окружностью точек  $P$  и  $P'$ , то теорема 9 будет справедлива и для бесконечно удаленной точки  $P'$ .

Напомним, что точкой Тебо называется такая точка окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , в которой пересекаются прямые Эйлера треугольников  $AH_2H_3$ ,  $BH_1H_3$ ,  $CH_1H_2$ , где  $H_1, H_2, H_3$  — основания высот треугольника  $ABC$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Пусть прямая Эйлера треугольника  $ABC$  пересекает его описанную окружность в точках  $P$  и  $P'$ . Тогда прямые Симсона точек  $P$  и  $P'$  пересекаются в точке Тебо треугольника  $ABC$ .

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Прямые Симсона концов диаметра описанной окружности треугольника, проходящего через центр его вписанной окружности, пересекаются во внутренней точке Фейербаха этого треугольника, а прямые Симсона концов диаметров, проходящих через центры внеписанных окружностей, пересекаются во внешних точках Фейербаха этого треугольника.

**ТЕОРЕМА 11.** Пусть  $P$  и  $P'$  — диаметрально противоположные точки описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $K$  — точка пересечения прямых Симсона точек  $P$  и  $P'$ , лежащая на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ ,  $K_1$  и  $K'_1$  — вторые точки пересечения прямых Симсона точек  $P$  и  $P'$  с окружностью Эйлера,  $K_H$  — точка, симметричная ортоцентру  $H$  относительно точки  $K$ .

Тогда прямая Симсона точки  $K_H$  перпендикулярна диаметру  $K_1K'_1$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вернемся к рис. 3. Пусть  $K$  — точка окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , а  $K_H$  — точка, гомотетичная  $K$  с центром гомотетии  $H$  и коэффициентом гомотетии 2.

Как мы уже говорили, прямые  $KE_1$ ,  $KE_2$ ,  $KE_3$  изогональны диаметральной прямой  $PP'$ . Поэтому и параллельные им прямые  $K_HA$ ,  $K_HB$ ,  $K_HC$  также изогональны этой прямой. Но, как мы знаем (см. предложение 2), прямая Симсона точки  $P$  перпендикулярна параллельным прямым, изогональным прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ . Отсюда следует, что прямая Симсона точки  $K_H$  перпендикулярна диаметру  $PP'$ , а, значит, и параллельному ему диаметру  $K_1K'_1$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 5.** Пусть  $T_H$  — точка, симметричная ортоцентру относительно точки Тебо произвольного треугольника. Тогда прямая Симсона точки  $T_H$  перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника.

**СЛЕДСТВИЕ 6.** Прямая Симсона точки, симметричной ортоцентру произвольного треугольника относительно его внутренней точки Фейербаха, перпендикулярна прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника.

Докажем теперь следующее утверждение:

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Пусть треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  с ортоцентрами  $H$  и  $H'$  имеют общую окружность Эйлера.

Тогда, если какие-либо две взаимно перпендикулярные прямые Симсона треугольника  $ABC$  совпадают с какими-либо двумя взаимно перпендикулярными прямыми Симсона треугольника  $A'B'C'$ , то совпадают и все остальные прямые Симсона этих треугольников.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как следует из теоремы 10, совпадающие прямые Симсона  $P_1K$  и  $P_2K$  треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  являются прямыми Симсона концов параллельных диаметров описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , получающихся из диаметра  $P_1P_2$  их общей окружности Эйлера гомотетиями с центрами в точках  $H$  и  $H'$  и коэффициентом 2 (рис. 4).

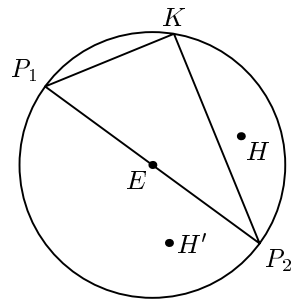


Рис. 4.

Начнем вращать эти параллельные диаметры вокруг центров соответствующих окружностей в одну и ту же сторону с одинаковой угловой скоростью, тогда с той же угловой скоростью и в ту же сторону будет вращаться и соответствующий этим диаметрам диаметр  $P_1P_2$  общей окружности Эйлера треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Прямые Симсона концов вращающихся диаметров будут проходить через середины отрезков, соединяющих эти концы с точками  $H$  и  $H'$  (для концов диаметра описанной окружности треугольника  $ABC$  — с  $H$ , а для концов второго диаметра — с  $H'$ ), т. е. через точки  $P_1$  и  $P_2$ .

Но, как было установлено ранее, прямые Симсона концов параллельных диаметров будут вращаться вокруг точек  $P_1$  и  $P_2$  в противоположную сторону с угловой скоростью в два раза меньшей скорости вращения параллельных диаметров.

Итак, прямые Симсона концов параллельных диаметров описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  в начальный момент времени совпадают, а затем начинают вращаться вокруг одних и тех же точек  $P_1$  и  $P_2$  в одну и ту же сторону с одинаковыми угловыми скоростями и поэтому совпадают в любой момент времени.

Более точно: пусть  $O$  и  $O'$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Тогда, если для двух точек  $P$  и  $P'$ , лежащих на описанных окружностях треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , векторы  $OP$  и  $O'P'$  сонаправлены, то прямые Симсона точек  $P$  и  $P'$  совпадают.  $\square$

### 3. КАСАНИЕ ПРЯМЫХ СИМСОНА С ОКРУЖНОСТЬЮ ЭЙЛЕРА ДАННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Напомним следующий факт, являющийся непосредственным следствием теорем 2 и 9.

Пусть  $P$  и  $P'$  — изогонально сопряженные точки относительно треугольника  $ABC$ . Тогда, если прямая  $PP'$  проходит через центр описанной

окружности этого треугольника, то общая педальная окружность точек  $P$  и  $P'$  касается окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

В случае, когда  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , прямые, изогональные прямым  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ , параллельны, т. е. точка  $P'$  бесконечно удалена, а общая педальная окружность точек  $P$  и  $P'$  вырождается в прямую Симсона точки  $P$ . Как мы уже знаем (см. замечание после теоремы 10), бесконечно удаленной точке  $P'$  соответствует точка пересечения прямой Симсона точки  $P$  с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ , совпадающая с серединой отрезка  $PH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

Вторая точка пересечения прямой Симсона точки  $P$  с окружностью Эйлера получится в результате пересечения прямых  $E_1P_1$ ,  $E_2P_2$ ,  $E_3P_3$ , изогональных прямой  $OP$  относительно углов  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  треугольника  $E_1E_2E_3$  (здесь, как и раньше,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  — точки Эйлера, т. е. середины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ). Прямая Симсона точки  $P$  будет касаться окружности Эйлера треугольника  $ABC$  в том и только в том случае, когда эти две точки совпадают, а для этого необходимо и достаточно, чтобы прямые, изогональные прямым  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  относительно углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника  $ABC$ , были параллельны  $OP$ .

Другими словами, прямая  $OP$  должна проходить через бесконечно удаленную точку  $P'$ , т. е. и в этом случае прямая  $PP'$  проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**ТЕОРЕМА 12.** Среди всех прямых Симсона произвольного треугольника имеется ровно три, которые касаются окружности Эйлера этого треугольника. Точки касания являются вершинами равностороннего треугольника. Если  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — величины углов данного треугольника ( $\alpha < \beta < \gamma$ ), то стороны этого равностороннего треугольника образуют с соответствующими сторонами данного треугольника углы, равные  $(\gamma - \alpha)/3$ ,  $(\beta - \alpha)/3$ ,  $(\gamma - \beta)/3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $AL$  — биссектриса угла  $BAC$ ,  $N$  — точка, диаметрально противоположная  $P$ ,  $K$  — точка пересечения  $AL$  и  $PN$ ,  $1/2 \sphericalangle AP = \varphi_1$  (рис. 5). Прямые  $AP$  и  $OP$  изогональны относительно угла  $BAC$  тогда и только тогда, когда  $\sphericalangle PAK = \sphericalangle PKA$ . Поскольку  $PN$  — диаметр, то  $\sphericalangle PAN = 90^\circ$  и  $\sphericalangle APK = \sphericalangle APN = 90^\circ - \sphericalangle ANP = 90^\circ - \varphi_1$  и, предполагая, что  $\sphericalangle PAK = \sphericalangle PKA$ , найдем

$$\begin{aligned} \sphericalangle PAK &= \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle APK) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - \varphi_1)) = \\ &= \frac{1}{2}(90^\circ + \varphi_1) = 45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_1. \end{aligned}$$

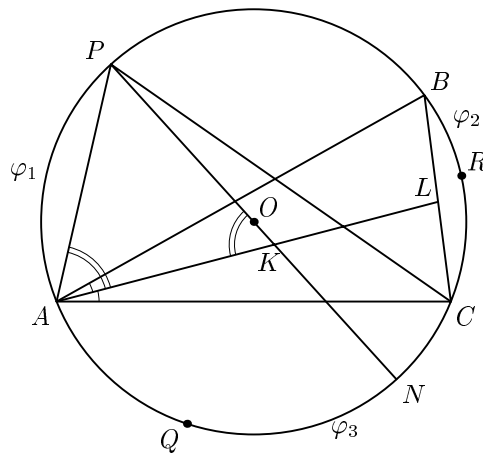


Рис. 5.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \angle PAK &= \angle PAB + \angle BAL = \frac{1}{2} \sphericalangle PB + \frac{1}{2} \angle BAC = \\ &= \frac{1}{2} \sphericalangle APB - \frac{1}{2} \sphericalangle AP + \frac{1}{2} \alpha = \gamma - \varphi_1 + \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому  $45^\circ + \varphi_1/2 = \gamma - \varphi_1 + \alpha/2$ , откуда  $3\varphi_1/2 = \gamma + \alpha/2 - 45^\circ$ ,  $\varphi_1 = 2/3(\gamma + \alpha/2) - 30^\circ = 2/3\gamma + \alpha/3 - 30^\circ$ .

Точно так же найдем еще две точки  $R$  и  $Q$ , для которых их прямые Симсона касаются окружности Эйлера треугольника  $ABC$ . Они определяются условиями  $\varphi_2 = 1/2 \sphericalangle BK = 2/3\alpha + \beta/3 - 30^\circ$ ,  $\varphi_3 = 1/2 \sphericalangle CQ = 2/3\beta + \gamma/3 - 30^\circ$  (как всегда, считаем, что  $\alpha < \beta < \gamma$ ).

Найдем углы треугольника  $PQR$ :

$$\begin{aligned} \angle PQR &= \frac{1}{2} \sphericalangle PR = \frac{1}{2} \sphericalangle PB + \frac{1}{2} \sphericalangle BR = \gamma - \varphi_1 + \varphi_2 = \\ &= \gamma - (2/3\gamma + 1/3\alpha - 30^\circ) + 2/3\alpha + \beta/3 - 30^\circ = \\ &= \gamma/3 + \alpha/3 + \beta/3 = (\alpha + \beta + \gamma)/3 = 180^\circ/3 = 60^\circ. \end{aligned}$$

Аналогично,  $\angle PRQ = \angle QPR = 60^\circ$ .

Итак, мы получили, что треугольник  $PQR$  равносторонний. Поскольку точки касания  $P_1, Q_1, R_1$  прямых Симсона точек  $P, Q, R$  с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$  являются серединами отрезков  $PH, QH, RH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , то треугольники  $PQR$  и  $P_1Q_1R_1$  гомотетичны и, следовательно, треугольник  $P_1Q_1R_1$  также равносторонний.

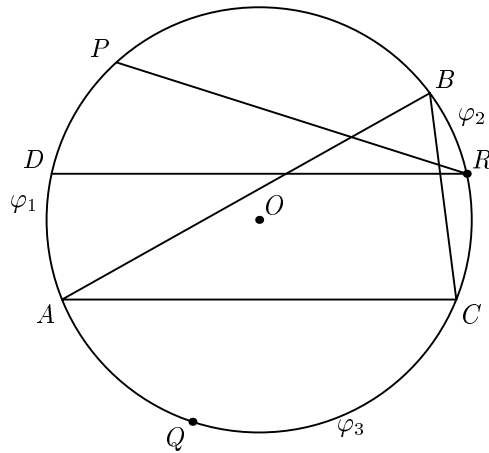


Рис. 6.

Найдем угол между сторонами  $PR$  и  $AC$  треугольников  $PQR$  и  $ABC$ . Для этого проведем через точку  $R$  хорду  $RD$ , параллельную  $AC$  (см. рис. 6). Тогда

$$\begin{aligned} \angle PRD &= \frac{1}{2} \sphericalcap PD = \frac{1}{2} \sphericalcap AP - \frac{1}{2} \sphericalcap AD = \frac{1}{2} \sphericalcap AP - \frac{1}{2} \sphericalcap CR = \\ &= \frac{1}{2} \sphericalcap AP - \left( \frac{1}{2} \sphericalcap BC - \frac{1}{2} \sphericalcap BK \right) = \varphi_1 - (\alpha - \varphi_2) = \\ &= 2/3\gamma + 1/3\alpha - 30^\circ - (\alpha - (2/3\alpha + \beta/3 - 30^\circ)) = \\ &= 2/3\gamma + \alpha/3 - 30^\circ - \alpha/3 + \beta/3 - 30^\circ = \\ &= (\gamma + \alpha + \beta)/3 + \gamma/3 - \alpha/3 - 60^\circ = 180^\circ/3 + (\gamma - \alpha)/3 - 60^\circ = (\gamma - \alpha)/3. \end{aligned}$$

Аналогично, углы между сторонами  $QR$  и  $AB$ ,  $PQ$  и  $BC$  равны соответственно  $(\beta - \alpha)/3$  и  $(\gamma - \beta)/3$ .

Заметим, что в ходе доказательства теоремы 12 установлено, что на описанной окружности каждого треугольника существуют ровно три точки, прямые Симсона которых касаются окружности Эйлера треугольника, причем эти точки совпадают с вершинами правильного треугольника. Данное утверждение составляет содержание задачи 8.4 задачника «Математического просвещения» (вып. 9, 2004, с. 246). Таким образом, попутно мы привели решение этой задачи.

Напомним, что геометрическое место точек  $P$  таких, что прямая  $PP'$ , где  $P'$  — точка, изогональная  $P$ , проходит через центр описанной окружности треугольника, называется кубикой Мак-Кэя этого треугольника. Из теорем 2 и 9 следует, что кубика Мак-Кэя треугольника совпадает

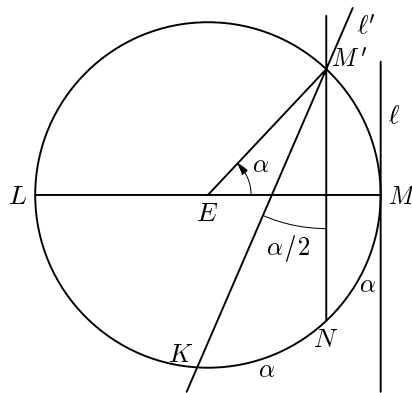


Рис. 7.

с геометрическим местом точек  $P$ , обобщенная педальная окружность которых касается окружности Эйлера этого треугольника.

Так как прямые Симсона точек  $P, Q, R$  где  $P, Q, R$  — вершины равностороннего треугольника, лежащие на описанной окружности треугольника  $ABC$ , касаются окружности Эйлера этого треугольника, то точки  $P, Q, R$  принадлежат кубике Мак-Кэя треугольника  $ABC$ . Таким образом, кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трех точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника.

Рассмотрим теперь одну из прямых Симсона, касающихся окружности Эйлера данного треугольника в точке  $M$  (рис. 7). Пусть эта прямая Симсона  $\ell$  является прямой Симсона точки  $P$ , лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$ , и пусть радиус  $OP$  повернулся против часовой стрелки на угол  $\alpha$  так, что точка  $P$  приняла положение  $P'$ .

Тогда в силу гомотетичности описанной окружности треугольника  $ABC$  и окружности Эйлера этого треугольника с центром в точке пересечения высот  $H$  прямая Симсона  $\ell'$  точки  $P'$  будет проходить через точку  $M'$  окружности Эйлера такую, что  $\sphericalangle MM' = \alpha$ . При этом, как уже неоднократно говорилось, прямая  $\ell'$  повернется вокруг точки  $M'$  на угол  $\alpha/2$ , т. е., если провести хорду  $M'N$ , параллельную  $\ell$ , то  $\sphericalangle KM'N = \alpha/2$  и  $\sphericalangle KN = \alpha$ . Дуги  $M'M$  и  $M'N$  симметричны относительно диаметра  $LM$ , поэтому  $\sphericalangle NM = \sphericalangle MM' = \alpha$  и  $\sphericalangle KM = \sphericalangle KN + \sphericalangle NM = \alpha + \alpha = 2\alpha$ .

Итак, справедливо

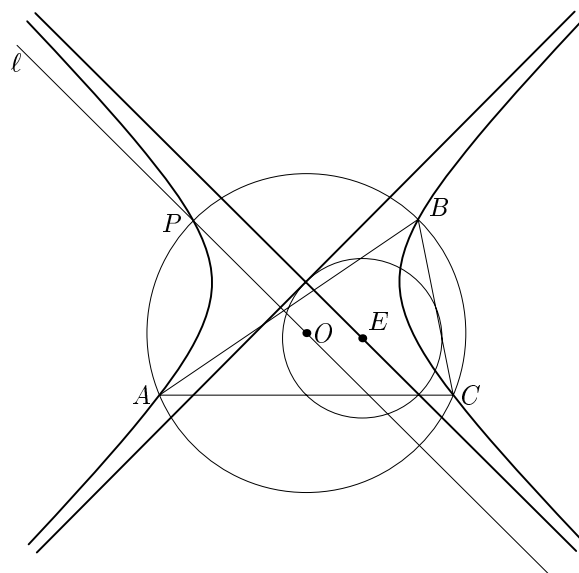
**Предложение 6.** Пусть  $M$  — точка касания прямой Симсона произвольного треугольника с его окружностью Эйлера. Тогда произвольная прямая Симсона этого треугольника пересекает его окружность Эйлера в точках  $K$  и  $Q$  таких, что точки  $K$  и  $Q$  лежат по разные стороны от диаметра, проходящего через точку  $M$  и  $\sphericalangle KM = 2\sphericalangle MQ$ .

## 4. О кубике МАК-КЭЯ и кривой ШТЕЙНЕРА

В этом пункте нам понадобится следующее утверждение из [3].

**ТЕОРЕМА 13 (12).** Исогональным образом прямой  $\ell$ , проходящей через центр описанной окружности треугольника  $ABC$  и не содержащей его вершин, является равносторонняя гипербола, описанная около этого треугольника, причем асимптотами этой гиперболы являются прямые Симсона точек пересечения прямой  $\ell$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ .

Рассмотрим пару взаимно перпендикулярных прямых Симсона, одна из которых касается окружности Эйлера данного треугольника  $ABC$ , а вторая проходит через центр этой окружности (рис. 8). Тогда эти прямые являются асимптотами равносторонней гиперболы  $\Gamma$ , описанной около треугольника  $ABC$  и совпадающей с изогональным образом прямой  $\ell$ , проходящей через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  параллельно той асимптоте, на которой лежит центр окружности Эйлера этого треугольника. Прямая  $\ell$  проходит через точку  $P$  пересечения гиперболы  $\Gamma$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ , центр  $O$  этой окружности и бесконечно удаленную точку  $P'$ , изогональную точке  $P$ , поэтому точки  $P$  и  $P'$  принадлежат кубике Мак-Кэя треугольника  $ABC$ . Если вращать прямую  $\ell$  вокруг точки  $O$  по часовой стрелке, то прямая



**Рис. 8.**



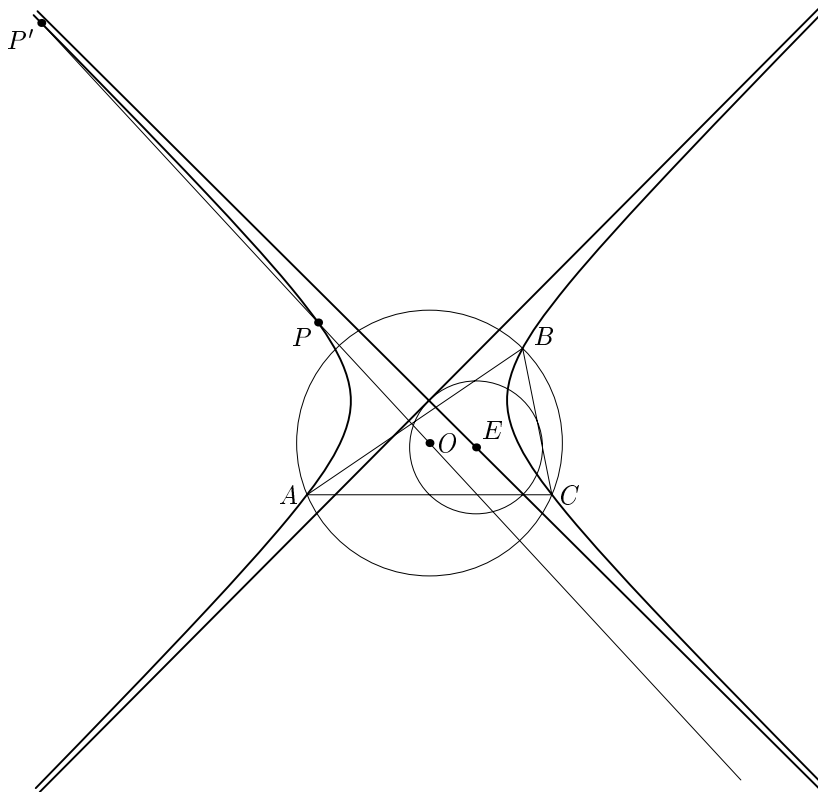


Рис. 9.

Симсона точки  $P$  начнет вращаться против часовой стрелки (см. начало пункта 2), соответственно против часовой стрелки будет вращаться и перпендикулярная ей прямая.

Отсюда следует, что прямая  $\ell$  пересечет гиперболу  $\Gamma$ , являющуюся ее изогональным образом, в двух изогональных точках  $P$  и  $P'$  (рис. 9). Так как прямая  $\ell$  проходит через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , то это означает, что точки  $P$  и  $P'$  принадлежат кубике Мак-Кэя этого треугольника. Но после бесконечно малого поворота исходной прямой  $\ell$  вокруг точки  $O$  точка  $P'$  будет мало отличаться от бесконечно удаленной точки, через которую проходит исходная гипербола  $\Gamma$ , а также ее асимптота, содержащая центр окружности Эйлера треугольника  $ABC$  и точку касания этой окружности с прямой Симсона точки  $P$ . Из приведенных рассуждений вытекает

**ТЕОРЕМА 14.** Кубика Мак-Кэя произвольного треугольника имеет три асимптоты, которые пересекаются в центре окружности Эйлера

этого треугольника и проходят через три точки касания окружности Эйлера с прямыми Симсона.

Рассмотрим теперь равностороннюю гиперболу  $\Gamma$  и из произвольной точки  $I$  этой гиперболы как из центра проведем окружность, проходящую через центр  $O$  гиперболы  $\Gamma$  (рис. 10). Пусть  $D$  — точка гиперболы, диаметрально противоположная  $I$ , а окружность с центром  $I$  и радиусом  $ID$  пересекает ту ветвь гиперболы, на которой лежит ее центр  $I$ , в точках  $A$  и  $B$ ,  $C$  — вторая точка пересечения этой окружности с другой ветвью гиперболы  $\Gamma$ .

Покажем, что треугольник  $ABC$  правильный. Опустим из точки  $D$  на прямую  $AB$  перпендикуляр, который пересечет гиперболу в точке  $H$ . Тогда  $H$  — ортоцентр треугольника  $ADB$  и точка  $H'$ , симметричная  $H$  относительно центра  $O$  гиперболы, лежит на этой гиперболе. С другой стороны, поскольку центр  $O$  гиперболы  $\Gamma$  лежит на окружности Эйлера треугольника  $ADB$ , вписанного в эту гиперболу (см. лемму 1 в [3]), а описанная окружность этого треугольника гомотетична окружности Эйлера с центром  $H$  и коэффициентом 2, то точка  $H'$  совпадает с точкой пересечения описанной окружности треугольника  $ADB$  с гиперболой  $\Gamma$ , т. е. с точкой  $C$ . Но тогда диагонали четырехугольника  $ICDH$  делятся точкой пересечения  $O$  пополам и, таким образом,

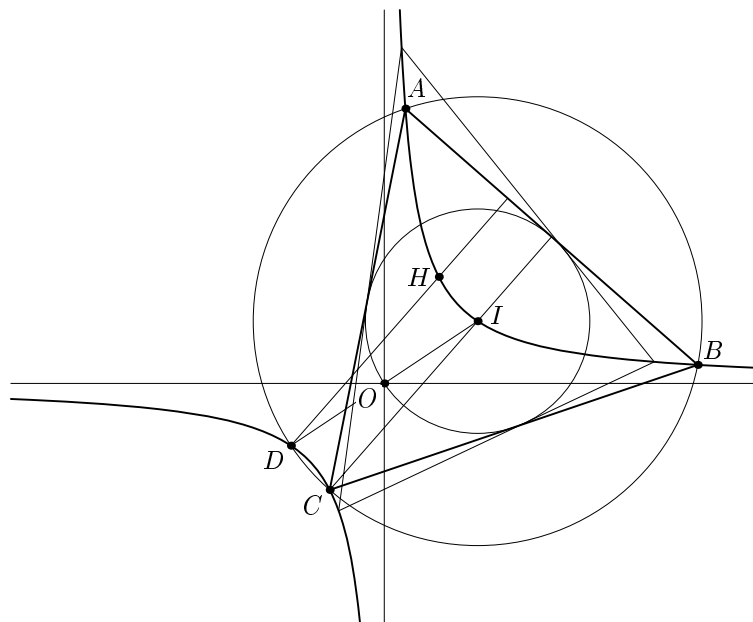


Рис. 10.

$ICDH$  — параллелограмм. Так как  $CI \parallel DH$ , а  $DH \perp AB$ , то и  $CI \perp AB$ . Поскольку  $I$  лежит на гиперболе  $\Gamma$ , отсюда вытекает, что  $I$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Вспомнив, что  $I$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , получим, что в этом треугольнике ортоцентр совпадает с центром описанной окружности, и, следовательно, треугольник  $ABC$  — равносторонний.

Итак, существует треугольник, вписанный в гиперболу  $\Gamma$  и описанный около окружности  $I$ , поэтому по теореме Понселе (см. [4, с. 166]) таких треугольников существует бесконечно много: за вершину  $A$  можно взять любую точку гиперболы, лежащую вне окружности  $I$  и провести через  $A$  прямые до пересечения с гиперболой в точках  $B$  и  $C$ . Тогда прямая  $BC$  будет касаться окружности  $I$  (рис. 10).

**ТЕОРЕМА 15.** Пусть  $I$  — окружность с центром на равносторонней гиперболе  $\Gamma$ , проходящая через центр  $F$  этой гиперболы. Тогда асимптоты кубик Мак-Кэя всех треугольников, вписанных в гиперболу  $\Gamma$  и описанных около окружности  $I$ , соответственно параллельны, а их точки пересечения лежат на прямой  $FI$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим треугольник  $ABC$ , вписанный в гиперболу  $\Gamma$  и описанный около окружности  $I$ . Поскольку окружность Эйлера треугольника  $ABC$  проходит через центр  $F$  гиперболы  $\Gamma$  одновременно со вписанной окружностью  $I$  этого треугольника, то по теореме Фейербаха эти окружности касаются в точке  $F$  и, таким образом, точка  $F$  совпадает с одной из точек Фейербаха треугольника  $ABC$ . Отсюда следует, что центр  $E$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$  лежит на прямой  $FI$ , но по теореме 14 центр окружности Эйлера треугольника является точкой пересечения асимптот кубики Мак-Кэя этого треугольника.

Для любого треугольника  $ABC$ , вписанного в гиперболу  $\Gamma$  и описанного около окружности  $I$ , гипербола  $\Gamma$  является изогональным образом прямой  $OI$ , где  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Так как прямая  $OI$  касается гиперболы  $\Gamma$  в точке  $I$ , то это означает, что центры описанных окружностей треугольников  $ABC$  лежат на касательной к гиперболе  $\Gamma$  в точке  $I$ , а асимптоты этой гиперболы совпадают с прямыми Симсона точек пересечения этой касательной с описанными окружностями треугольников  $ABC$ .

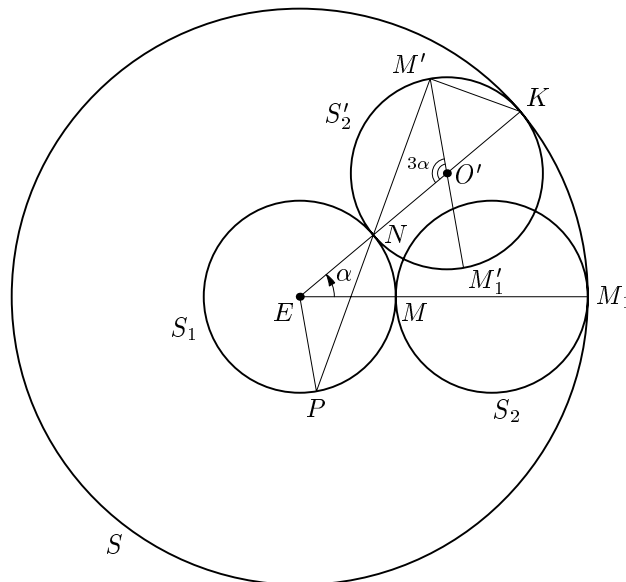
Применим к треугольнику  $ABC$  гомотетию с центром  $F$ , переводящую окружность Эйлера этого треугольника в окружность  $I$ . Тогда окружность Эйлера треугольника  $A_1B_1C_1$ , полученного в результате этой гомотетии, совпадет с окружностью  $I$ , являющейся окружностью Эйлера правильного треугольника, вписанного в гиперболу  $\Gamma$  и описанного около окружности  $I$ . Так как, кроме того, асимптоты гиперболы будут

прямыми Симсона обоих треугольников, то согласно предложению 5 совпадут и остальные соответствующие прямые Симсона этих треугольников. Отсюда следует, что совпадут также точки касания прямых Симсона этих треугольников с их общей окружностью Эйлера и по теореме 14 совпадут асимптоты их кубик Мак-Кэя. Поскольку треугольники  $ABC$  получаются из треугольников  $A_1B_1C_1$  гомотетией с центром  $F$ , то асимптоты их кубик Мак-Кэя соответственно параллельны.  $\square$

Кривой Штейнера называется трехрогая гипоциклоида, т. е. кривая, описываемая точкой  $M$  окружности радиуса  $r$ , которая катится по окружности радиуса  $3r$  без скольжения, все время касаясь ее внутренним образом.

**ТЕОРЕМА 16.** Пусть  $S$  и  $S_1$  — концентрические окружности радиусов  $3r$  и  $r$  соответственно,  $K$  — кривая Штейнера с вершинами на окружности  $S$ , касающаяся окружности  $S_1$  в точке  $M$ . Тогда касательная к кривой Штейнера пересекает окружность  $S_1$  в двух точках  $N$  и  $P$  таких, что  $\sphericalangle PM = 2 \sphericalangle NM$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $S_2$  окружность радиуса  $r$ , касающуюся окружности  $S_1$  внешним образом в точке  $M$  и окружности  $S$  внутренним образом в точке  $M_1$  (рис. 11). Кривая Штейнера, указанная в условии, совпадает с траекторией точки  $M$  окружности  $S_2$  при качении



**Рис. 11.**

внутренним образом окружности  $S_2$  по окружности  $S$  без скольжения. Предположим, что окружность  $S_2$  после поворота приняла положение  $S'_2$  и стала касаться окружностей  $S_1$  и  $S$  в точках  $N$  и  $K$  соответственно, при этом  $\angle KEM_1 = \alpha$ , где  $E$  — центр окружностей  $S$  и  $S_1$ , а точки  $M$  и  $M_1$  перешли в  $M'$  и  $M'_1$ .

Так как  $K$  — центр мгновенного вращения окружности  $S'_2$ , то вектор скорости точки  $M'$ , направленный по касательной к ее траектории, совпадающей с кривой Штейнера, перпендикулярен прямой  $M'K$ . Но  $\angle NM'K = 90^\circ$ , как вписанный угол окружности  $S'_2$ , опирающийся на ее диаметр  $NK$ , поэтому прямая  $M'N$  является касательной к кривой Штейнера в точке  $M'$ . Пусть  $P$  — точка пересечения касательной  $M'N$  с окружностью  $S_1$ , а  $O'$  — центр окружности  $S'_2$ . Из-за отсутствия скольжения дуга  $KM_1$  окружности  $S$  равна дуге  $KM'_1$  окружности  $S'_2$ :  $\overset{\frown}{KM_1} = \overset{\frown}{KM'_1}$  или  $\alpha \cdot 3r = \beta \cdot r$ , откуда  $\beta = \angle KO'M'_1 = 3\alpha = \angle M'O'N$ .

Далее, из равенства равнобедренных треугольников  $PEN$  и  $M'O_1N$  выводим, что  $\angle PEN = \angle M'O'N = 3\alpha$ , откуда получаем:  $\angle PEM = \angle PEN - \angle MEN = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$  и, таким образом,  $\overset{\frown}{PM} = 2\overset{\frown}{NM}$ .  $\square$

Из теоремы 12, предложения 6 и теоремы 16 вытекает

**ТЕОРЕМА 17.** Огибающей прямых Симсона произвольного треугольника является кривая Штейнера, касающаяся его окружности Эйлера в трех точках.

На рис. 12 изображены треугольник, его описанная окружность, окружность Эйлера и кривая Штейнера этого треугольника.

В свою очередь из теорем 14 и 17 выводится

**СЛЕДСТВИЕ 7.** Асимптоты кубики Мак-Кэя произвольного треугольника совпадают с осями кривой Штейнера этого треугольника.

Обозначим, как всегда, через  $H$  ортоцентр треугольника  $ABC$ . Тогда окружность Эйлера треугольника  $ABC$  проходит через середины сторон треугольников  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$  и поэтому эти треугольники имеют общую окружность Эйлера.

Отметим без доказательства, что треугольники  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$  имеют также общую кривую Штейнера, а их кубики Мак-Кэя — соответственно общие асимптоты.

Приведем в заключение еще один интересный факт. Как известно, прямые, которые делят угол на три равные части, называются трисектрисами этого угла. Теорема Морлея утверждает, что трисектрисы углов треугольника, прилежащие к его сторонам, пересекаются в трех точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (более подробно о теореме Морлея см. [2] и [1]). Назовем этот треугольник треугольником

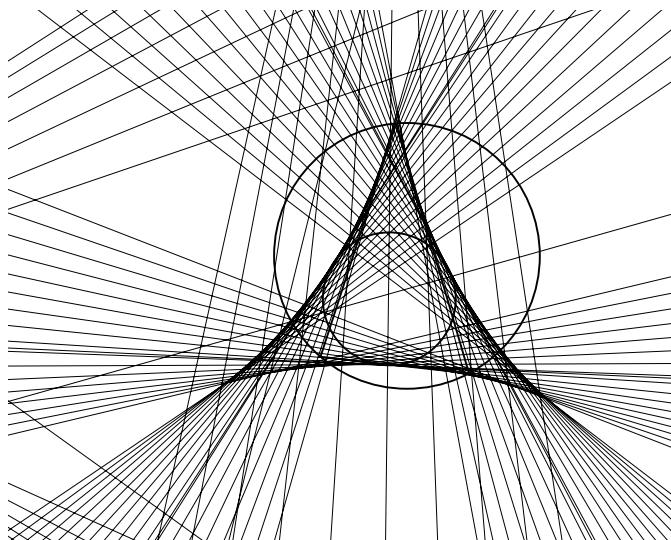


Рис. 12.

Морлея. Оказывается, что для любого треугольника стороны его треугольника Морлея и равностороннего треугольника, вершины которого совпадают с вершинами кривой Штейнера исходного треугольника, соответственно параллельны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Конн А. *Новое доказательство теоремы Морли* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005.
- [2] Куланин Е. Д. *Вокруг теоремы Морлея* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №24–25, 1995.
- [3] Куланин Е. Д. *Об описанных окружностях чевианых и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005.
- [4] Прасолов В. В., Тихомиров В. М. *Геометрия*. М.: МЦНМО, 1997.

---

Е. Д. Куланин, Московский городской психолого-педагогический университет  
e-mail: lucas03@mail.ru