Комментарий к статье М. Аппельбаума, В. Журавлёва и П. Самовола

А. Я. Канель

Задача интересна и для случая нестрогих неравенств. В этом случае картина такова. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, определённую на отрезке длины γ, интеграл от которой по любому отрезку длины α неположителен, а по любому отрезку длины β — неотрицателен.

Если $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, и $\gamma \geqslant \alpha+\beta$, то $f(x) \equiv 0$. (Это следует из приведенного в статье доказательства.) (А если $\gamma < \alpha+\beta$, то содержательные примеры существуют.)

Пусть теперь величины α и β соизмеримы. Тогда для некоторого $\delta > 0$, $\alpha = n\delta$, $\beta = n\delta$, $(m,n) = 1$. Из результатов статьи следует, что если $\gamma \geqslant \alpha + \beta$, то интеграл от f по любому отрезку длины δ равен нулю, а функция f периодична на своей области определения с периодом δ.

Случай $\gamma \leqslant \alpha + \beta - \delta$ покрывается результатами статьи, пусть $\gamma = \alpha + \beta - \delta + \varepsilon$, $\varepsilon < \delta$.

Тогда можно утверждать только, что интеграл от f по любому сдвигу начального отрезка длины δ на величину $k\delta + \tau$, где $\tau \leqslant \varepsilon$, равен нулю. При этом можно построить примеры функции с ненулевым интегралом для каждого такого сдвига.