Задача о собственных числах

А. К. Ковальджи

Приведем формулировку и решение задачи 7.3 из задачника «Математического просвещения».

Задача (теорема). Пусть A — прямоугольная матрица, A' — транспонированная матрица, тогда матрицы AA' и $A'A$ имеют одинаковые наборы ненулевых собственных чисел с одинаковыми кратностями.

Доказательство. Пусть $AA'v = \lambda v$, где v — собственный вектор, λ — собственное число. Тогда $A'AA'v = \lambda A'v$, $(A'A)(A'v) = \lambda(A'v)$. Значит, каждое собственное число матрицы AA' является собственным числом матрицы $A'A$ и наоборот. Докажем, что совпадают кратности чисел, исходя из идеи непрерывного изменения.

Рассмотрим матрицу B такого же размера как A, максимальный минор которой — диагональная матрица с различными элементами, а остальные элементы — нули. Все ненулевые собственные числа матрицы BB' различны. Рассмотрим матрицу $C = (1-\alpha)B + \alpha A$, где α — параметр, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

При непрерывном изменении α от 0 до 1 собственные числа CC' непрерывно меняются от набора собственных чисел BB' до набора собственных чисел BB', причем, при $\alpha = 0$ все собственные числа различны, а при $\alpha = 1$ они «склеиваются» и получают кратности.

Поскольку между различными собственными числами CC' и $C'C$ существует взаимно однозначное соответствие, и они меняются непрерывно, то при каждой «склейке» значений собственных чисел будет сохраняться равенство их кратностей. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема важна для прикладных задач, например для метода главных компонент, поскольку матрица AA' может оказаться очень большого размера, и, чтобы напрямую вычислить ее собственные числа и векторы, не хватит ресурсов компьютера, а матрица $A'A$ — может оказаться маленького размера, тогда, вычислив ее собственные числа λ_i и векторы v_i, мы легко найдем собственные числа и векторы AA', равные λ_i и Av_i.