# Решения задач из предыдущих выпусков

8.2. Условие. Найти дискриминант многочлена $P(x) = x^{2003} + x + 1$.

Решение. Рассмотрим более общую задачу: найти дискриминант многочлена $P_t(x) = x^{2003} + x + t$. Сначала заметим, что дискриминант равен результанту многочлена и его производной, и по известной формуле (см., например, Б. Л. ван дер Варден, «Алгебра») результант многочленов $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ и $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ равен определителю

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 & a_1 \ \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_m & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_m & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_m \end{vmatrix}.$$

Поскольку $P'(x) = 2003x^{2002} + 1$, видно, что в нашем случае результант есть многочлен от $t$ степени 2002 и старшим коэффициентом $2003^{2003}$. Вычислим этот многочлен. Для этого посмотрим, при каких $t$ у $P$ и $P'$ есть общий корень. Корни $P'$ суть $x_k = 2003^{-1/2002} \exp\left(\frac{\pi i(2k+1)}{2002}\right)$, $k = 1, \ldots, 2002$. Поэтому искомые значения $t$ суть $t_k = -x_k - x_k^{2003} = -\frac{2002}{2003}x_k$. Многочлен с корнями $t_k$ есть $\prod_{k=1}^{2002}(t - t_k) = t^{2002} + \frac{2002^{2002}}{2003^{2003}}$. Поэтому искомый многочлен получается из него умножением на число (раз он той же степени). Мы знаем его старший коэффициент, поэтому осталось выписать ответ: дискриминант многочлена $P_t(x)$ равен $2003^{2003}t^{2002} + 2002^{2002}$, а дискриминант многочлена $P(x)$ получается при $t = 1$.

Ответ: $2003^{2003} + 2002^{2002}$. (*В. В. Доценко*)

8.3. Условие. Можно ли круг с двумя дырками отобразить в себя без неподвижных точек?

Решение. В условии задачи допущена ошибка. Вопрос состоит в существовании непрерывного взаимнооднозначного отображения (гомеоморфизма).

Круг с двумя дырками гомеоморфен сфере с тремя дырками. Можно считать, что эти дырки имеют небольшой размер (скажем, $1^\circ$) и расположены на экваторе сферы так, что расстояния между их центрами одинаковы и равны $120^\circ$.

Гомеоморфизм без неподвижных точек можно теперь описать так: это композиция поворота на $120^\circ$ вокруг полярной оси и симметрии относительно плоскости экватора. Поскольку полушария меняются местами, то вне экватора неподвижных точек нет. С другой стороны, ограничение этого отображения на экватор является поворотом на $120^\circ$, у которого неподвижных точек тоже нет.

Замечание. Данная конструкция обобщается для круга с $n \geqslant 2$ дырками.

(*М. Л. Концевич*)

8.4. Условие. Доказать, что на описанной окружности каждого треугольника существует ровно три точки, для которых соответствующие прямые Симсона касаются окружности девяти точек треугольника, причем эти точки являются вершинами правильного треугольника.

Решение. Для решения нам понадобятся следующие два факта о прямых Симсона.

$1^\circ$. Если $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$, $P$ — точка на его описанной окружности, то прямая Симсона точки $P$ проходит через середину отрезка $PH$ (рис. 1).

$2^\circ$. Если $P_1$ и $P_2$ — точки описанной окружности треугольника $ABC$, $s_1$ и $s_2$ — соответствующие им прямые Симсона, то ориентированный угол между прямыми $s_1$ и $s_2$ (измеренный от $s_1$ к $s_2$) равен половине ориентированного угла $P_2OP_1$ ($O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$), рис. 2.

Используя эти утверждения (их доказательства можно найти, например, в книге В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии», задачи 5.92 и 5.96), получить решение задачи очень легко.

А именно, поскольку окружность Эйлера треугольника получается из его описанной окружности гомотетией с центром $H$ и коэффициентом $1/2$, то, согласно утверждению $1^\circ$, любая прямая Симсона имеет хотя бы одну общую точку с окружностью Эйлера (на рис. 3 эта точка — середина отрезка $PH$ — обозначена через $L$). Чтобы прямая Симсона касалась окружности Эйлера, эта точка должна быть их единственной общей точкой, т. е. прямая Симсона должна быть перпендикулярна отрезку $EL$ ($E$ — центр окружности Эйлера). Рассмотрим теперь треугольник $OHP$; поскольку $HE = EO$, отрезок $EL$ является его средней линией, тем самым, $EL \parallel OP$. Значит, прямая Симсона касается окружности Эйлера тогда и только тогда, когда она перпендикулярна отрезку $OP$.

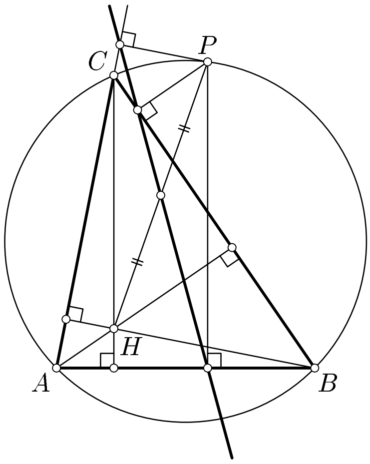


***Рис. 1.***

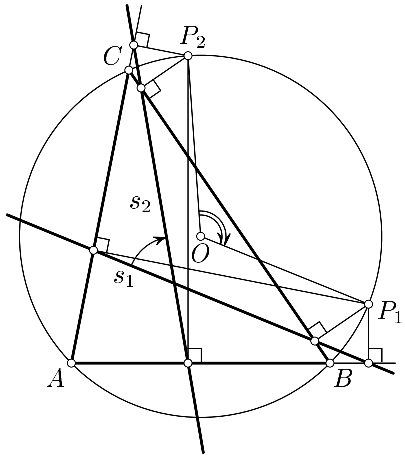


***Рис. 2.***

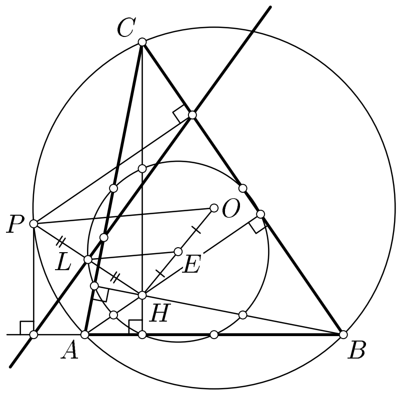


***Рис. 3.***

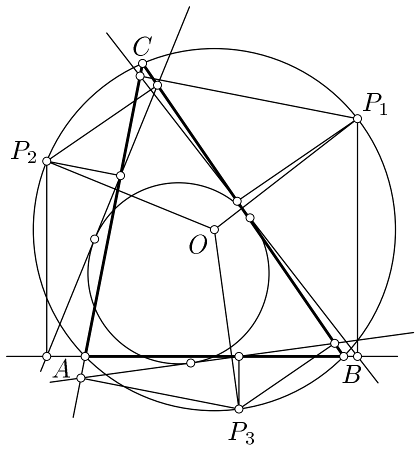


***Рис. 4.***

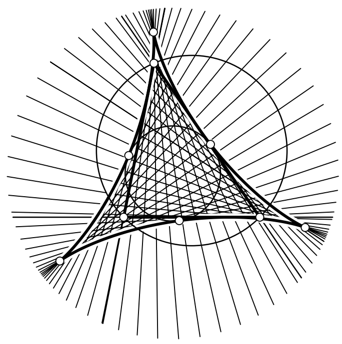

***Рис. 5.***

Используем утверждение 2°: при проходе точкой $P$ всей описанной окружности (т. е. когда отрезок $OP$ поворачивается вокруг $O$ на 360°) прямая Симсона поворочивается на −180°. При этом условие перпендикулярности выполняется ровно трижды, причём между соответствующими положениями точками $P$ (на рис. 4 они обозначены $P_1$, $P_2$, $P_3$) отрезок $OP$ поворачивается на 120°. Так что $P_1P_2P_3$ — равносторонний треугольник.

Замечания. 1. Пусть вершинам треугольника $ABC$ соответствуют комплексные числа $a$, $b$, $c$, а центру его описанной окружности — 0. Можно доказать, что тогда точкам $P_1$, $P_2$, $P_3$ соответствуют три значения $\sqrt[3]{-abc}$.

2. Утверждение задачи основано на том, что огибающей прямых Симсона данного треугольника является дельтоида (гипоциклоида с тремя остриями), описанная вокруг его окружности Эйлера, рис. 5.

(*М. Ю. Панов*)

9.4. Условие. Дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{[k/2]}$ при $k > 1$. Докажите, что ни один ее член не делится на 4.

Первое решение. Пусть $n = 2^k m$, где $m$ — нечетно. Докажем индукцией по $n$, что

1. если $k$ нечетно, то $a_n \equiv 2 \pmod 4$;
2. если $k$ четно и количество цифр в двоичной записи числа $n$ нечетно, то $a_n \equiv 1 \pmod 4$;
3. если $k$ четно и количество цифр в двоичной записи числа $n$ четно, то $a_n \equiv 3 \pmod 4$.

Последние два случая можно объединить в один: если $k$ четно, то $a_n \equiv 2s(n) - 1 \pmod 4$, где $s(n)$ — количество цифр в двоичной записи числа $n$.

База $n = 1$ очевидна.Переход: пусть это верно для $1, 2, \ldots, n-1$, докажем для $n = 2^k m$.

1. Если $k$ нечетно, то по предположению индукции $a_n \equiv 2s(n-1) - 1 + 2s(n/2) - 1 \pmod 4$. Учитывая, что $s(n/2) = s(n)$, $s(n-1) = s(n) + k - 1$, получаем

$$2s(n-1) - 1 + 2s(n/2) - 1 = 2s(n) - 1 + 2s(n) - 1 + 2k - 2 = 2k \equiv 2 \pmod 4.$$

2. Если $k$ четно и $k > 0$, то предположению индукции $a_n \equiv 2s(n-1) - 1 + 2 \pmod 4$. Из $s(n-1) = s(n) + k - 1$ получаем

$$2s(n-1) - 1 + 2 = 2s(n) + 2k - 1 \equiv 2s(n) - 1 \pmod 4.$$

Если $k = 0$, то полагаем $n - 1 = 2^{\ell} s$, где $s$ нечетно.

Если $\ell-1$ нечетно, то из $a_n \equiv 2+2s(n-1)-1 \pmod 4$ и $s(n-1)=s(n)-1$ получаем $2+2s(n-1)-1=2s(n)-1$.

Если $\ell-1$ четно, то из $a_n \equiv 2+2s([(n-1)/2])-1 \pmod 4$ и $s([(n-1)/2])=s(n)-1$ получаем $2+2s([(n-1)/2])-1=2s(n)-1$.

Индуктивный переход доказан. Значит, $a_n$ не делится на 4.

(*А. Бадзян*)

Второе решение. Доказательство того, что $a_n$ не делится на 4, следует из трех фактов.

1. Если $n$ нечетное, то $a_n$ нечетное.

Действительно, при $k>0$ имеем $a_{2k+1}=a_{2k}+a_k=a_{2k-1}+2a_k$, так что $a_{2k+1}$ и $a_{2k-1}$ имеют одинаковую четность. Поскольку $a_1$ нечетно, то и все остальные $a_{2k+1}$ также нечетны.

2. При $k>0$ выполняется $a_{4k} \equiv a_k \pmod 4$.

Для $k=1$ это сравнение выполняется. Для остальных $k$ его можно проверить по индукции:

$$\begin{aligned}a_{4k+4}&=a_{4k+3}+a_{2k+2}=a_{4k+2}+2a_{2k+1}+a_{k+1}=\\&=a_{4k+1}+3a_{2k+1}+a_{k+1}=a_{4k}+3a_{2k+1}+a_{2k}+a_{k+1}=\\&=a_{4k}+4a_{2k+1}+a_{k+1}-a_k,\end{aligned}$$

поэтому $a_{4k+4}-a_{k+1} \equiv a_{4k}-a_k \pmod 4$.

3. Если $n$ четно, но не делится на 4, то для $a_n$ справедливо то же самое: оно четно и не делится на 4.

Из п. 2 получаем:

$$\begin{aligned}a_{4k+2}&=a_{4k+1}+a_{2k+1}=a_{4k}+a_{2k}+a_{2k+1}=\\&=(a_{4k}-a_k)+2a_{2k+1} \equiv 2a_{2k+1} \pmod 4,\end{aligned}$$

далее применим утверждение п. 1.

Теперь утверждение задачи можно доказать от противного: если $n$ — наименьшее число, для которого $a_n$ делится на 4, то $n$ должно делиться на 4 (в силу пп. 1 и 3), но тогда в силу п. 2 $a_{n/4}$ также должно делиться на 4. Получили противоречие, которое означает, что все $a_n$ не делятся на 4.

(*А. Зелевинский*)