Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найдите все такие числа. (*А. К. Ковальджи*)

2. Кривая $\mathcal{C}$ задана в $\mathbb{R}^4$ параметрически уравнениями $x_i = P_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где многочлены $P_i(\tau)$ имеют степень 3. Докажите, что $\mathcal{C}$ живет в трехмерной плоскости (т. е. найдется 3-мерное аффинное подпространство, которое ее содержит). (*А. Я. Белов*)

3. Рассмотрим циклические слова с отмеченным началом из 0 и 1 с четным числом нулей. Припишем единицам слова знаки + и − так, чтобы знаки соседних единиц совпадали или отличались в зависимости от четности числа нулей между ними (например, идущие подряд единицы берутся с одинаковым знаком). *Сигнатурой слова* назовем абсолютную величину алгебраической суммы единиц. Докажите, что число слов длины n и сигнатуры $n - 2k$ равно числу сочетаний из n по k при $n - 2k > 0$ и вдвое меньше при $n - 2k = 0$. (*Э. Б. Винберг*)

4. На плоскости проведены n систем равноотстоящих прямых; i-я система состоит из всех прямых вида $a_i x + b_i y = c_i + k$, $k \in \mathbb{Z}$. При

этом никакие три прямых не пересекаются в одной точке, и никакие две системы не параллельны. Эти системы разбивают плоскость на многоугольники. Пусть S — средняя площадь многоугольника, S_{ij} — площадь параллелограмма решетки, порожденной i-й и j-й системами. Докажите, что

$$S^{-1} = \sum_{i<j} S_{ij}^{-1}$$

(Средняя площадь многоугольника — это величина $S = \lim\limits_{t\to+\infty} S_t/N_t$, где S_t — общая площадь всех многоугольников разбиения, целиком содержащихся в круге радиуса t с центром в начале координат, N_t — количество этих многоугольников.) (*А. Я. Канель*)

5. На берегу круглого острова Гдетотам расположено n деревень, в каждой живут борцы. Был проведен турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня А считается *сильнее* деревни Б, если хотя бы $(1-\alpha)$-я часть поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни А. (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.) Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Докажите, что $\alpha \leqslant \alpha_0 = \dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{\pi}{n+2}}$, причем число α_0 нельзя заменить на меньшее.

(*И. Богданов*)

6. Внутри выпуклого четырехугольника взята точка, равноудаленная от противоположных сторон. Оказалось, что она лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей. Докажите, что четырехугольник является либо вписанным, либо описанным, либо трапецией. (*А. Заславский*)

7. От прямоугольника отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру. Может ли последовательность отношений сторон у этих прямоугольников быть периодической, если одна из сторон исходного прямоугольника равна 1, а другая равна а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt[3]{2}$, в) $\sqrt{2005}$. (*В. А. Уфнаровский, А. Я. Белов*)

8. Можно ли покрасить сферу белой и красной красками так, чтобы любые три исходящих из центра сферы взаимно перпендикулярных луча пересекали ее в одной красной и двух белых точках?

(*S. Kochen, M. Specker*)

9. G — группа порядка $2^n(2k+1)$, содержащая элемент порядка 2^n. Докажите, что множество элементов нечетного порядка является подгруппой. (*Заочный конкурс памяти Кирилла Дочева*)

10. Среди k монет есть одна фальшивая, причем неизвестно, легче она или тяжелее. За какое минимальное число взвешиваний можно определить фальшивую монету на чашечных весах без гирь, если при этом а) требуется узнать, легче она или тяжелее; б) не требуется узнать это. (*А. М. Яглом, И. М. Яглом*)

11. Последовательность непрерывных функций (F_n), где n-я функция зависит от n переменных, называется *средней*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

    1) Для любого натурального n функция F_n симметрична, однородна (т. е. при перестановке переменных значение F_n не меняется и
    $$F_n(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot F_n(x_1, \ldots, x_n)$$
    для любых чисел $\lambda, x_1, \ldots, x_n$), кроме того $F_n(x, \ldots, x) = x$ для любого x, $F_2(1, 0) = 1/2$.

    2) Для любых натуральных n и k равенство
    $$F_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = F_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, Y, \ldots, Y)$$
    где $Y = F_k(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$, выполнено для любых чисел $x_1, \ldots, x_{n+k}$.

    Докажите, что функция F_n есть среднее арифметическое:
    $$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
    (*А. Я. Канель*)

12. Квадрат разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число четно. (*Фольклор*)