Проблемы математического образования

Алгебра, анализ и дифференциальные уравнения (синтетический курс)

В. М. Тихомиров

Введение

Как надо учить математике и чему? Давайте поразмышляем.

Конечно, стоит воспользоваться богатейшим опытом преподавания математики на механико-математическом факультете МГУ. Начну с воспоминаний.

Я поступил на механико-математический факультет МГУ в 1952 году. Математическое отделение мехмата состояло в ту пору из восьми кафедр: анализа (заведующим кафедрой был тогда А. Я. Хинчин), высшей геометрии и топологии (П. С. Александров), алгебры (А. Г. Курош), дифференциальной геометрии (В. Ф. Каган), дифференциальных уравнений (И. Г. Петровский), теории функций и функционального анализа (Д. Е. Меньшов), теории вероятностей (А. Н. Колмогоров), теории чисел (А. О. Гельфонд).

Важную роль в преподавании играли обязательные курсы. Вот список обязательных курсов, из которых, в основном, складывалось мое математическое образование: математический анализ (лекторы Л. А. Тумаркин и А. И. Маркушевич), аналитическая геометрия (П. С. Александров), алгебра (А. Г. Курош), обыкновенные дифференциальные уравнения (В. В. Немыцкий), дифференциальная геометрия (П. К. Рашевский), анализ III (А. Н. Колмогоров), теория функций комплексного

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, 2006(23–56)

переменного (А. О. Гельфонд), дифференциальные уравнения с частными производными (О. А. Олейник), вариационное исчисление (И. М. Гельфанд), теория вероятностей (Ю. В. Прохоров).

Я недаром привел списки заведующих кафедрами и лекторов. По-моему, они свидетельствуют о том, что мехмат МГУ в ту пору был несравненным по концентрации выдающихся ученых среди всех остальных университетов мира. В подтверждение этого приведу слова В. И. Арнольда: «Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляет собой явление исключительное, и мне не приводилось встречать ничего подобного нигде.» (В. И. Арнольд, «Избранное–60». М.: Фазис, 1997, с. 714.) И образование, которое давалось в те годы, было очень высокого ранга. Это образование закладывалось не только на обязательных курсах. Знания, полученные на них, подкреплялись практическими семинарами, которые вели опытнейшие преподаватели-доценты, имевшие многолетний стаж работы. Назову некоторых: Н. Д. Айзенштат, В. Б. Демидович, С. А. Гальперн, З. М. Кишкина, А. С. Пархоменко, И. В. Проскуряков и другие. Но главной особенностью мехмата МГУ того времени было изобилие специальных курсов и специальных семинаров. Среди семинаров, сыгравших выдающуюся роль в истории отечественной математики — топологический кружок П. С. Александрова, семинар по теории вероятностей А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина, семинар по теории функций Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова, семинар по комплексному анализу М. А. Лаврентьева и А. И. Маркушевича, семинар по уравнениям с частными производными И. Г. Петровского, С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова, семинар по всей математике И. М. Гельфанда и многие, многие другие.

Но вернемся к обязательным курсам. Они, как это можно усмотреть из сопоставлений их названий с названиями кафедр, распределялись, как правило, по кафедрам. Кафедры дифференциальных уравнений и теории функций и функционального анализа имели два курса (первая — по обыкновенным уравнениям и уравнениям с частными производными, вторая — по комплексному переменному и вариационному исчислению). Курс «Анализ III», читавшийся Колмогоровым, был особенным. Это был *синтетический курс*, соединявший в себе элементы теории функций, функционального анализа и интегральных уравнений (раньше эти дисциплины читались порознь).

* * * * * *

В течение последних двух лет мне довелось преподавать в двух необычных университетах — Московском независимом университете и Международном университете Бремена. В этой статье отражены некоторые идеи, которые возникли у меня в связи с этим преподаванием.

Сложившаяся у нас в России система университетского преподавания математики (да и многого другого) построена по так сказать «федеративному» принципу, когда математика рассматривается, как страна, разделенная на фактически независимые штаты: Анализа, Алгебры, Геометрии, Дифференциальных уравнений, Теории функций и функционального анализа, Теории вероятностей...

В университете Бремена введен особый курс, который я не встречал в других местах. Он называется "Perspectives of Mathematics". Это курс без фиксированной программы, читаемый по очереди последовательно всеми профессорами университета для студентов, получивших уже предварительные знания по анализу и линейной алгебре. И мне пришла в голову идея прочитать *синтетический курс* по всей той математике, которой меня учили на первых двух курсах мои учителя пятьдесят с лишним лет тому назад. При этом я исходил из идеи, что математика — это единая страна, единое унитарное государство, и потому все можно воссоединить в едином цикле лекций. Здесь представлен конспект четырех лекций этого курса.

В первой лекции речь идет о решении линейных уравнений, во второй — о кониках и квадриках, затем о началах анализа и, наконец, о дифференциальных уравнениях. Каждая лекция подразделяется на четыре части. В «нулевой» части речь идет о предыстории, это «гуманитарный» фрагмент, не требующий каких-то математических знаний. Он еще адресован и дедушкам с бабушками, которые что-то хотят преподать своим внукам. В следующей части мы вкратце касаемся истоков теории, и там мы опираемся, в основном, на школьные знания. Затем речь идет о развитии темы; она частично бывает представлена в математическом вузовском образовании и на первых курсах университетов. В последней части доказываются некоторые фундаментальные результаты, читаемые, да и то далеко не всегда, на старших курсах университетов. В конце статьи вкратце обсуждаются приложения рассмотренных в ней вопросов к другим разделам математики и к естествознанию.

В начальных частях лекций речь заходит о знаменитых трудах, таких как папирус Райнда — древнейший задачник, известный в истории науки, «Коники» Аполлония, "Nova methodus" Лейбница (первая опубликованная статья по анализу) и "Method of Fluctions" Ньютона, далее упоминаются труды Эйлера, Лагранжа и Коши. В заключительных частях доказываются альтернатива Фредгольма, теорема Гильберта – Шмидта о симметрических операторах, обобщенная теорема Люстерника об обратном отображении, теоремы Коши существования, единственности, непрерывной и дифференцируемой зависимости решений дифференциальных уравнений.

Основной части предшествует раздел, содержащий предварительные сведения, в котором вводятся основные пространства, в которых предстоит действовать, а также формулируются три принципа существования и три принципа линейного анализа. Доказательства некоторых из этих принципов и некоторые прямые следствия из них приведены в приложении. В самом конце статьи мы возвращаемся к вопросу о том, чему и как надо учить математике.

Предварительные сведения

Здесь собраны основные понятия, а также некоторые факты общей топологии и линейного анализа, которые нам понадобятся далее в заключительных частях лекций. Я рассчитываю на читателей, имеющих какое-то отношение к математике, в частности, на школьников, ей интересующихся. Этой категории читателей исходные понятия в той или иной мере знакомы, так что к материалу этого раздела они могут обращаться по мере необходимости при чтении статьи (или ее отдельных частей, которые в значительной степени независимы друг от друга). И потому все предварительные сведения набраны петитом.[1)]

Стоит также предупредить читателя, что часть утверждений оставлена без доказательства, или дается лишь основная идея доказательства. Такие пропущенные детали рассуждений читателю рекомендуется восстановить самостоятельно.

Пространства и основные понятия

Основным, важнейшим пространством для нас явится совокупность вещественных чисел $\mathbb{R}$. Вещественные числа можно складывать, вычитать и делить (нельзя, впрочем, делить на нуль). Вещественные числа будут для нас примером векторного, топологического, метрического и банахова пространств, определения которых нас ждут впереди.

Кроме $\mathbb{R}$ мы постоянно будем сталкиваться с пространствами $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$.

Элементы $\mathbb{R}^n$ это столбцы $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ из n вещественных чисел; весь такой столбец мы будем обозначать одной буквой x и писать при этом $x \in \mathbb{R}^n$. Такие элементы будем называть *векторами*. Если $x \in \mathbb{R}^n$, то через x^T обозначается строка $(x_1, \dots, x_n)$. Столбцы можно покоординатно складывать и умножать на вещественные числа: если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то $x + y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$, а если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$.

[1)]Сведения, содержащиеся в этом разделе, изложены в большинстве учебных книг по математике. Хотел бы порекомендовать читателю статьи «Банахово пространство», «Векторное пространство», «Гильбертово пространство», «Компактное пространство», «Компактный оператор», «Метрическое пространство», «Топологическое пространство» в кн. «Математическая Энциклопедия», 5тт., М.: Советская энциклопедия, 1977.

Кроме пространства $\mathbb{R}^n$ векторов-столбцов будем рассматривать пространство $(\mathbb{R}^n)'$ векторов-строк. $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$ доставляют примеры векторных пространств, т.е. множеств X с двумя операциями — сложением элементов и умножением элементов на вещественные числа с естественными аксиомами (коммутативности, ассоциативности, наличия нуля и обратного элемента для сложения и аксиом $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ и $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, связывающих друг с другом операции сложения и умножения на число).

Помимо векторов нам встретятся таблицы размеров $n \times m$, называемые *матрицами*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Векторы из $\mathbb{R}^n$ можно воспринимать, как матрицы из одного столбца и n строк, векторы из $(\mathbb{R}^n)'$ — как матрицы из одной строки и n столбцов.

Определяется операция умножения матрицы A на вектор. Произведение матрицы A на вектор $x \in \mathbb{R}^n$ равно вектору $Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$; произведение вектора $y \in (\mathbb{R}^m)'$ на A — это вектор $yA = (\sum_{j=1}^m a_{j1}y_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{jn}y_j)$.

Если $x \in (\mathbb{R}^n)'$, а $y \in \mathbb{R}^n$, то через $x \cdot y$ обозначают сумму $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ (это соответствует правилу умножения матриц). Величину $\sqrt{x^T \cdot x}$ обозначают $|x|$ и называют *модулем* вектора x.

Пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$ доставляют примеры топологических пространств. Вот что это такое. Пусть задано множество X и в нем система подмножеств τ, обладающая свойствами: a) пустое множество и всё X принадлежат τ, b) объединение любой совокупности множеств из τ и пересечение конечного числа множеств из τ принадлежат τ. Такая пара (X, τ) называется *топологическим пространством*.

Множества из τ называются *открытыми*, дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми множествами*. Подмножество топологического пространства называется *компактом*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Примером компакта на $\mathbb{R}$ может служить отрезок $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$.

Нетрудно доказать, что пространства $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)'$, в которых множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой ξ оно содержит открытый шар $U(\xi, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \xi| < \varepsilon\}$ с центром в ξ радиуса ε при некотором $\varepsilon > 0$ (зависящем от ξ), становятся топологическими пространствами.

Важным примером топологических пространств являются метрические пространства.

Метрическое пространство — это множество X, на котором определена функция расстояния, сопоставляющая паре $(x_1, x_2) \in X \times X$ неотрицательное число $d(x_1, x_2)$ (расстояние между x_1 и x_2), равное нулю, если и лишь если $x_1 = x_2$, обладающее свойством симметрии $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (для любых x_1 и x_2) и удовлетворяющее неравенству треугольника: $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ для любых x_1, x_2, x_3.

Метрическое пространство становится топологическим, если открытые множества в нем определять, как множества, которые вместе с каждой своей точкой ξ содержат *открытый шар* $U(\xi, \varepsilon) = \{x \mid d(x, \xi) < \varepsilon\}$ (с центром в ξ радиуса ε при некотором $\varepsilon > 0$, зависящем от ξ).

Примерами метрических пространств могут служить прямая $\mathbb{R}$ (с $d(x, y) = |x - y|$) и n-мерные пространства $\mathbb{R}^n$ или $(\mathbb{R}^n)'$ с $d(x, y) = |x - y| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$.

Частным случаем метрических пространств являются *нормированные* пространства. Это векторные пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, в которых определена норма $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_+$, равная нулю лишь на нулевом элементе и удовлетворяющая аксиомам: $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\, \|x\|_X$, для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$ и $\|x + x'\|_X \leqslant \|x\|_X + \|x'\|_X$ для любых $x, x' \in X$. Метрика в нормированном пространстве определяется равенством $d(x, x') = \|x - x'\|_X$.

Геометрические рассмотрения естественно приводят к определению n-мерного *евклидова* пространства векторов-строк $x = (x_1, \ldots, x_n)$, оснащенного *скалярным произведением* $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ (это пространство будем обозначать $\mathbf{E}^n$). Оно становится банаховым, если норму определить как $\|x\|_{\mathbf{E}^n} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Векторное пространство $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, удовлетворяющим аксиомам неотрицательности ($\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in X$, причем равенство достигается лишь на нулевом векторе), симметрии ($\langle x, x'\rangle = \langle x', x\rangle$ для любых $x, x' \in X$) и билинейности ($\langle \alpha x + \alpha' x', x''\rangle = \alpha\langle x, x''\rangle + \alpha'\langle x', x''\rangle$) называется *предгильбертовым*.

Объектом изучения будут далее и непрерывные функции на топологических или метрических пространствах.

Понятие функции или отображения (как и понятие множества) относится к числу изначальных понятий в математике. Если даны два множества X и Y, то отображением из X в Y называется соответствие f, при котором каждому элементу x множества X соотнесено либо пустое множество, либо один элемент $f(x)$ множества Y. При этом пишут: $f\colon X \to Y$. (Иначе можно сказать, что функция $f\colon X \to Y$ определяется подмножеством пар (x, y) (*декартова произведения* $X \times Y$ *всех пар* (x, y)), при котором каждому $x \in X$ соответствует либо пустое множество, либо одна пара (x, y); совокупность пар $(x, f(x))$ называется *графиком* f). Отображения из X в $\mathbb{R}$ называют *функционалами*, а если $X = \mathbb{R}^n$, то *функциями*. Подмножество $\operatorname{dom} f \subset X$ тех x, для которых $f(x) \neq \varnothing$, — *область определения* f; если $A \subset X$, то $\{y \in Y \mid \exists\, x \in A\colon y = f(x)\}$ — *образ* $A \subset X$ при отображении f (обозначается $f(A)$), а $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ — *прообраз* $B \subset Y$ (обозначается $f^{-1}(B)$). Если $f(A) = Y$, то отображение f называют *сюръективным*.

Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется *непрерывным*, если прообраз любого множества из τ_2 принадлежит τ_1 («прообраз открытого множества открыт»). Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ (где X — топологическое пространство) называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если ее лебеговские множества $\mathcal{L}_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ ($\mathcal{M}_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \geqslant \alpha\}$) замкнуты при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

В случае метрического пространства определение непрерывной функции равносильно более привычному (с ε и δ).

Пусть (X, d) — метрическое пространство и f — функция на X. Она называется *непрерывной в точке* $\xi \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $d(x, \xi) < \delta$, то $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Если f непрерывна в каждой точке множества $A \subset X$, она называется *непрерывной на* A. Отображение $F\colon X \to X$ метрического пространства (X, d) в себя называется *сжимающим*, если существует такое число θ, $0 < \theta < 1$, что $d(F(x), F(x')) \leqslant \theta d(x, x')$ для любых x, $x' \in X$. Множество в метрическом пространстве (X, d) называется *всюду плотным* в X, если его замыкание совпадает с X; множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным в* X, если каждое открытое подмножество в X содержит открытый шар, не пересекающийся с A.

Важнейшим метрическим бесконечномерным пространством является пространство $C([a, b])$ непрерывных вещественных функций на отрезке $[a, b]$, где расстояние определяется по формуле: $d(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Последовательность его элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *сходящейся*, если существует элемент x такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$; она называется *фундаментальной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $N \in \mathbb{N}$

такой, что если $n, m > N$, *то* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Очевидно, что любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если в нём любая фундаментальная последовательность является сходящейся. Примерами полных метрических пространств являются прямая $\mathbb{R}$, пространства $\mathbb{R}$ и $(\mathbb{R}^n)'$ и пространство $C([a,b])$.

Полные относительно метрики $d(x,x') = \|x - x'\|_X$ нормированные пространства называются *банаховыми*. Если X — нормированное пространство, то совокупность X^* непрерывных линейных функционалов на нем является банаховым пространством. Действие линейного функционала $x^* \in X^*$ на элемент $X \in X$ обозначим $\langle x^*, x\rangle$.

Обобщением евклидовых пространств $\mathbf{E}^n$ является гильбертово пространство — векторное пространство со скалярным произведением, полное относительно метрики $d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$. Гильбертово пространство является метрически изоморфным со своим сопряженным.

И в заключение дадим определение основного понятия дифференциального исчисления — понятия производной. Пусть X — одно из пространств, о которых речь шла выше: либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}^n$, либо банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$, U — открытое множество, содержащее точку $\widehat{x}$ и $f\colon U \to \mathbb{R}$ – вещественная функция. Говорят, что функция f дифференцируема в точке $\widehat{x}$, если найдется число a, соответственно — вектор $a \in (\mathbb{R}^n)'$ или непрерывный линейный функционал a на пространстве X такие, что $f(\widehat{x} + x) = f(\widehat{x}) + a[x] + r(x)$, где $a[x]$ в случае $\mathbb{R}$ это просто произведение чисел a и x, в случае $\mathbb{R}^n$ — произведение $a \cdot x$ вектора $a \in (\mathbb{R}^n)'$ на вектор $a \in \mathbb{R}^n$, в банаховом случае — это результат действия линейного функционала a на элемент x (т.е. $\langle a, x\rangle$), а $r(x) = o(x)$, а это означает, что $\lim\limits_{\|x\|\to 0} \dfrac{|r(x)|}{\|x\|} = 0$ (где $\|x\|$ в конечномерном случае означает $|x|$, а в бесконечномерном — $\|x\|_X$.

Принципы существования

I. Принцип компактности Вейерштрасса – Лебега – Бэра. *Полунепрерывная снизу на компакте функция достигает своей нижней грани.*

II. Принцип разреженности Бэра. *Полное метрическое пространство не представимо как объединение счетного числа нигде не плотных множеств.*

III. Принцип сжимающих отображений Пикара – Каччиополли – Банаха. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет неподвижную точку.* Отсюда легко выводится, что если некоторая степень отображения является сжимающей, то само отображение имеет единственную неподвижную точку.

Три принципа линейного анализа

Определение. Говорят, что два множества A и B в нормированном пространстве X *строго отделимы*, если существуют непрерывный линейный функционал $x^* \in X^*$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\min_{x\in A}\langle x^*, x\rangle \geqslant \max_{x\in B}\langle x^*, x\rangle + \varepsilon$.

Принцип отделимости (следствие принципа Хана – Банаха). *Замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства строго отделимо от точки, ему не принадлежащей.* Следствием этого результата является факт нетривиальности аннулятора $L^\perp = \{x^* \in X^* \mid \forall x \in L\ \langle x^*, x\rangle = 0\}$: *если L — замкнутое подпространство X, не совпадающее с X, то $L^\perp \neq \{0\}$.*

Теорема о правом обратном (следствие принципа открытости Банаха). *Пусть X и Y — банаховы пространства, $\Lambda\colon X \to Y$ — линейный, непрерывный, сюръективный оператор. Тогда существуют такие отображение $R\colon Y \to X$ и константа C, что $\Lambda R y = y$, $\|R(y)\|_X \leqslant C\|y\|_Y$ для всех $y \in Y$.*

Определение. Топология в пространстве X^*, сопряженном к нормированному пространству X, порожденная множествами $\Pi(x,\alpha) = \{x^* \mid \langle x^*, x\rangle < \alpha\}$, $x \in X$, $\alpha > 0$ и их конечными пересечениями, называется *слабой*.

Принцип компактности Банаха – Алаоглу. *Ограниченное выпуклое замкнутое подмножество пространства, сопряженного к банахову пространству, компактно в слабой топологии.*

1. Теория линейных уравнений

1.0. Задача из папируса Райнда и решение одного уравнения с одним неизвестным

Древнейшей рукописью, в которой обсуждаются математические вопросы, считается так называемый «Папирус Райнда» (названный по имени его владельца, египтолога Г. Райнда), написанный, как полагают, 4000 лет тому назад. В нем содержатся решения арифметических задач. Вот задача из этого папируса:

> *Число и седьмая часть этого числа в сумме равны девятнадцати. Чему равно число*?

(Если читателю захочется узнать, как египтянин должен был решать эту задачу, он может прочитать об этом в книге Г. Вилейтнера «Хрестоматия по истории науки», М.–Л.: ОНТИ, 1935, с. 14).

Для решения этой задачи надо составить одно уравнение с одним неизвестным:

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

в котором $A = 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$ и $b = 19$ известны, а x надо найти. О том, как решать уравнения с одним неизвестным, многие узнают еще до школы: для того, чтобы решить уравнение (1.1), надо поделить b на A (и тогда найдется $x = \frac{b}{A}$). В задаче из папируса Райнда $x = 19 : \frac{8}{7} = 16\frac{5}{8}$.

1.1. «Семь частей искусства математики» и решение системы двух уравнений с двумя неизвестными

В китайском учебнике «Семь частей искусства математики», написанном во время династии Хань свыше восемнадцати веков тому назад, есть задача: *В клетке фазаны и кролики. У них вместе* 35 *голов и* 94 *ноги. Сколько в клетке фазанов и сколько кроликов*?

Решать такие задачи нас учат в школе. В мое время детей учили решать их двумя способами: арифметически (в четвертом и пятом классе) и алгебраически (начиная с шестого). При арифметическом решении надо было рассуждать, скажем, так. Если бы вместо кроликов были бы куры, у них с фазанами вместе было бы семьдесят ног, на двадцать четыре ноги меньше. Эти двадцать четыре ноги получились за счет того, что кроликов было двенадцать, а фазанов, следовательно, двадцать три. Проверка: у двадцати трех фазанов сорок шесть ног, у двенадцати кроликов — сорок восемь, а всего девяносто четыре. Задача решена правильно.

Чтобы решить задачу «алгебраически», надо составить два уравнения с двумя неизвестными. Если число фазанов обозначить через x_1, а число кроликов через x_2, мы приходим к уравнениям: $x_1+x_2 = 35$, $2x_1+4x_2 = 94$.

В общем виде два уравнения с двумя неизвестными записываются так: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$, где a_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, и b_i, $i = 1,2$, известны, а x_1 и x_2 надо найти. Эту систему уравнений можно записать в виде (1.1), только A будет уже не числом, а таблицей из четырех чисел $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ (называемой *матрицей*). При этом x и b — это тоже не числа, а векторы — пары чисел, расположенные в столбец $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$. Для матрицы A и вектора x можно определить произведение Ax: надо первый элемент верхней строки умножить на x_1, а второй на x_2, получив первый элемент вектора произведения, а потом то же проделать со второй строкой. Таким образом, произведение матрицы A на вектор x приводит к вектору $Ax = \left(\begin{smallmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{smallmatrix}\right)$, и равенство (1.1) превращается в систему:

$$Ax = b \ \Leftrightarrow\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \tag{1.1$'$}$$

Школьников учат решать подобные системы методом исключения неизвестных. Например, для того, чтобы решить задачу про фазанов и кроликов, разумно из первого уравнения выразить x_2 через x_1 и, подставив во второе уравнение, найти x_1. Так или примерно так решают линейные уравнения и на практике (где иногда встречаются задачи с миллионами неизвестных). Но есть путь, имеющий теоретический интерес, который ведет к явному выражению решений не только двух уравнений с двумя неизвестными, но любого числа n уравнений с n неизвестными через «определители». Продемонстрируем его сначала на примере двух уравнений с двумя неизвестными.

Обозначив $a^1 = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{smallmatrix}\right)$, $a^2 = \left(\begin{smallmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ и $b = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$, изобразим эти векторы на плоскости в декартовой системе координат (см. рис. 1). Пусть $V(a^1, a^2)$ означает (ориентированную) площадь параллелограмма, порожденного векторами a^1 и a^2. Функция $(a^1, a^2) \to V(a^1, a^2)$ обладает следующими очевидными свойствами:

a) если $e^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, то $V(e^1, e^2) = 1$;

b) $V(e^1, e^2) = -V(e^2, e^1)$;

c) $V(\alpha_1 a^1 + \bar{\alpha}^1 \bar{a}^1, a^2) = \alpha_1 V(a^1, a^2) + \bar{\alpha}^1 V(\bar{a}^1, a^2)$.

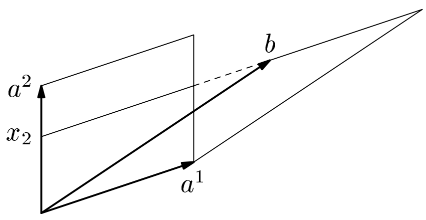

Рис. 1.

Эти свойства приводят к тому, что

$$V = V(a^1, a^2) = V(a_{11}e^1 + a_{21}e^2, a_{12}e^1 + a_{22}e^2) =$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})V(e^1, e^2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Данное выражение называется *детерминантом* (*или определителем*) *матрицы* $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, обозначаемым $\det A$. Обозначим $V_1 = V(b, a^2)$ и $V_2 = V(a^1, b)$. Уравнение $(1.1')$ можно переписать в виде $a^1x_1 + a^2x_2 = b$. Из рис. 1 можно усмотреть, что $x_2 = \dfrac{V_2}{V}$ и аналогично, что $x_1 = \dfrac{V_1}{V}$, причем оба соотношения сразу выводятся из самих свойств a)–c).

В задаче про фазанов и кроликов $V = 2$, $V_1 = 46$, $V_2 = 24$, откуда получается, что в клетке 23 фазана и 12 кроликов. Это решение сложнее, чем решение исключением неизвестных, но оно, повторюсь, важно для многих теоретических рассмотрений.

Расскажем теперь о системах линейных уравнений со многими переменными. Теория таких уравнений начала складываться в 18 веке, а завершилась в девятнадцатом. С этой теорией знакомят студентов во многих вузах инженерного, экономического и многих других профилей, где изучают математику (и, разумеется, в университетах).

1.2. Системы n линейных уравнений с n переменными

Систему n уравнений с n неизвестными также можно записать в виде (1.1), только A будет уже матрицей размера $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

x и b — это n-мерные векторы-столбцы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

а произведение матрицы A на вектор x, определяемое аналогично двумерному случаю, приводит к вектору

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix},$$

и тогда равенство (1.1) превращается в систему:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j = b_n, \tag{1.2}$$

Попробуем решить систему (1.2) методом, обобщающим прием, только что продемонстрированный в предыдущем разделе, когда n равнялось двум.

Обозначим $a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, a^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Введем функцию $V\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, $V = V(a^1, \ldots, a^n)$ «объема» системы векторов $\{a^j\}_{j=1}^n$. Двумерные и трехмерные примеры показывают, что разумно потребовать от этой функции выполнения таких условий:

a) условия нормировки, согласно которому объем единичного куба должен равняться единице: $V(e^1, \ldots, e^n) = 1$, где $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$;

b) условия «антисимметричности»:

$$V(e^1, \ldots, e^{i-1}, e^i, e^{i+1}, e^{i+2}, \ldots, e^n) = -V(e^1, \ldots, e^{i-1}, e^{i+1}, e^i, e^{i+2}, \ldots, e^n);$$

c) условия линейности по каждому векторному аргументу, для этого достаточно потребовать, чтобы

$$V(\alpha a^1 + \bar{\alpha}\bar{a}^1, a^2, \ldots, a^n) = \alpha V(a^1, a^2, \ldots, a^n) + \bar{\alpha} V(\bar{a}^1, a^2, \ldots, a^n).$$

Также, как в двумерном случае, из приведенных аксиом однозначно выводится выражение для объема параллелепипеда, порожденного векторами a^1, a^2 и a^3 в трехмерном случае:

$$V(a^1, a^2, a^3) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Продолжая по индукции, приходим к такому результату: *существует единственная функция $V = V(a^1, \ldots, a^n)$, которая определяется аксиомами* a)-c). Эта функция равна сумме $\sum_P (-1)^{\operatorname{sign} P} \Pi_{i=1}^n a_{iP(i)}$, взятой по всем перестановкам P первых n чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ со знаком, равным $(-1)^{\operatorname{sign} P}$, где число $\operatorname{sign} P$ равно нулю, если переход от $\{1, 2, \ldots, n\}$

к $\{P(1), P(2), \ldots, P(n)\}$ требует четного числа транспозиций соседних элементов, и единице, если требуется нечетное число транспозиций (скажем, член $a_{21}a_{32}a_{13}$ имеет знак $+$, ибо переход от (312) к (123) требует двух транспозиций: (312) $\to$ (132) $\to$ (323)). Выписанная функция удовлетворяет аксиомам a)–c). Она и называется *детерминантом или определителем* матрицы A и обозначается $\det A$. Для тренировки читатель, который сталкивается с этим понятием впервые, может сосчитать какой-нибудь определитель четвертого порядка или выписать ответ в общем виде (придется просуммировать выражение из двадцати четырех слагаемых).

Основной теоретический результат, касающийся систем n линейных уравнений с n неизвестными — правило Крамера[2)] — состоит в следующем:

Предложение 1.1. a) *Если определитель системы $V = V(a^1, \ldots, a^n)$ отличен от нуля, то уравнение $Ax = b$ разрешимо и решение системы имеет вид $x_i = \dfrac{V_i}{V}$, где $V_i = V(a^1, \ldots, a^{i-1}, b, a^{i+1} \ldots, a^n)$.*

b) *Имеет место альтернатива: либо уравнение $Ax = b$ однозначно разрешимо для любого $b \in \mathbb{R}^n$, либо однородная система $Ax = 0$ имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Пусть задана матрица $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, у которой $\det A = V(a^1, \ldots, a^n) \neq 0$. Из геометрического смысла определителя (и, разумеется, из его аксиоматических свойств) следует, что если вместо a^j подставить в $V(a^1, \ldots, a^n)$ вектор a^k, $k \neq j$, то получится нуль. Пусть V_{ij} — объем системы векторов $\{a^1, \ldots, a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, \ldots, a^n\}$. Если помножить V_{ij} на a_{ij} и раскрыть выражение для определителя V_{ij}, то соберутся все члены определителя матрицы A, которые содержат в произведении элемент a_{ij}. Теперь, если просуммировать $\sum_{i=1}^n a_{ij}V_{ij}$, то соберутся все члены определителя матрицы A; если же взять сумму $\sum_{i=1}^n a_{ik}V_{ij}$ для $k \neq j$, то получится определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами a^k, т. е. нуль. Отсюда вытекает, что $e^j = \sum_{i=1}^n \dfrac{V_{ij}}{V} a^i$, где e^j — j-й базисный вектор, а V_{ij} — объем системы векторов $\{a^1, \ldots, a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, \ldots, a^n\}$, а значит следует, что система уравнений (1.2) разрешима для любого $b = \sum_{j=1}^n b_j e^j$. При этом однородная система не может иметь ненулевого решения, ибо это несовместимо с неравенством нулю определителя. Заодно мы доказали правило Крамера, ибо $b = \sum_{j=1}^n b_j e^j = \sum_{i,j=1}^n b_j \dfrac{V_{ij}}{V} a^j = \sum_{j=1}^n \dfrac{V_j}{V} a^j$.

[2)] Габриэль Крамер (1704–1752) — швейцарский математик; установил и опубликовал (в 1750 году) правило решения n линейных уравнений с n неизвестными, заложив основы теории определителей.

Предположим теперь, что система (1.2) разрешима для любого вектора b, а однородная система имеет ненулевое решение x^1. Обозначим через L_1 совокупность всех решений однородной системы. Решим уравнение $Ax^2 = x^1$. Тогда $x^2 \in L_2 \setminus L_1$, где L_2 — совокупность всех решений $A^2x = 0$. Решим уравнение $Ax_3 = x_2$ и далее будем поступать аналогично, и в результате (вроде бы) построим любое число линейно независимых векторов $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Но это невозможно, ибо $V(x^1, \ldots, x^n) \neq 0$ (что вытекает из линейной независимости) и тогда по доказанному все остальные векторы должны выражаться через $\{x^m\}_{m=1}^n$. $\square$

Проведенное только что рассуждение является базисным в доказательстве бесконечномерного аналога доказанной теоремы, известного как альтернатива Фредгольма. С этой альтернативой (да и то не всегда) знакомят лишь студентов университетов (в то время, как правило Крамера проходят всюду — оно является существенной компонентой курса линейной алгебры[3)]).

1.3. Альтернатива Фредгольма

Определение. Линейный оператор $\Lambda\colon X \to X$, где $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, называется *компактным*, если он отображает единичный шар X в компактное множество.

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма). *Пусть X это банахово пространство, $\Lambda\colon X \to X$ компактный линейный оператор и $A = I - \Lambda$, где I — единичный оператор. Тогда имеет место альтернатива: либо уравнение $Ax = b$ однозначно разрешимо для любого $b \in X$, либо однородная система $Ax = 0$ имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Если $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, тогда неоднозначность следует уже для $b = 0$. Покажем, что если уравнение $Ax = b$ разрешимо для любого b, то $\operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\} = \{0\}$. Допустим, что это не так и пусть $x_1 \neq 0$ и $x_1 \in \operatorname{Ker} A$. Найдем $x_2 = Ax_1$. Тогда $x_2 \in \operatorname{Ker} A^2 \setminus \operatorname{Ker} A$. Продолжая этот процесс, найдем цепь строго вложенных друг в друга подпространств $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 \ldots \subset \operatorname{Ker} A^n \subset \ldots$ Легко доказывается, что в каждом банаховом пространстве для любого подпространства, не совпадающего со всем пространством, найдется вектор единичной длины, находящийся на расстоянии, сколь угодно близком к единице от этого подпространства. Выберем в каждом подпространстве $\operatorname{Ker} A^n$ элемент x_n единичной нормы, находящийся на расстоянии $\geqslant 1/2$ от подпространства

[3)] Следует сказать при этом, что правилом Крамера в практических расчетах никто не пользуется.

$\operatorname{Ker} A^{n-1}$. Если $m > n$, то нетрудно проверить, что $z = x_n - Ax_n - Ax_m \in \operatorname{Ker} A^{n-1}$ и значит, $\|\Lambda x_m - \Lambda x_n\|_X = \|z - x_m\|_X \geqslant 1/2$, что невозможно ввиду компактности Λ. $\square$

Доказанная теорема имеет многочисленные приложения в анализе. О них мы поговорим в конце. Альтернатива Фредгольма была доказана шведским математиком Иваром Фредгольмом (1866–1927) в 1900 году для специального класса линейных уравнений (так называемых интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида $x(t) - \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau = b(t)$ с непрерывными K и b, рассматриваемых в пространстве $C([a,b])$). В работе Фредгольма рассматривалось также и транспонированное уравнение $\xi(\tau) - \int_a^b K(\tau,t)\xi(t)dt = \beta(\tau)$ и доказывалась вторая теорема Фредгольма, о том, что если для основного уравнения имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения, число же линейно независимых решений основного и транспонированного решений конечно и одинаково (см. И. Г. Петровский, «Лекции по теории интегральных уравнений», М.: УРСС, 2003; в этой книге теорема доказывается методом вырожденных ядер). Сформулированную выше первую часть второй теоремы Фредгольма легко можно вывести из результата, доказанного нами.

Альтернатива Фредгольма явилась итогом больших усилий многих математиков второй половины 19 века, и этот результат воспринимался тогда как выдающееся событие, венчающее теорию линейных уравнений.

* * * * * *

Вот мы и совершили свое первое четырехступенное восхождение к одной из вершин математической науки. Повторюсь: первая ступень нашего «восхождения» преодолевается обычно еще до школы, вторая — на уроках арифметики и алгебры в школе, третья — в вузах, где преподают математику, четвертая — в университетах.

Нами была предпринята попытка преодолеть весь этот путь — от папируса Райнда к началу двадцатого века — в одной лекции. Удалась ли эта попытка, судить читателю.

2. Теория квадратичных функций. Коники и квадрики

Этот раздел мы начинаем не с одномерного, а с двумерного случая, с плоскости, с плоской геометрии, и это уведет нас сначала в мир античности. А далее нам останется сделать всего два шага — в n-мерный, а затем в бесконечномерный мир.

2.0. Несколько слов о «Кониках» Аполлония

Аполлоний (ок. 250 до н.э. – ок. 170 до н.э.), наряду с Евклидом и Архимедом, — один из трех величайших математиков древности. Его многотомный труд «Коники» (конические сечения) (увы, не полностью дошедший до нас), является безусловной вершиной античной математики. Там были исследованы плоские сечения прямого кругового конуса — эллипсы, гиперболы и параболы, — такие имена дал этим кривым Аполлоний. Об Аполлонии и его великом труде читатель может узнать из замечательной книги Б. А. Розенфельда «Аполлоний Пергский», М.: МЦНМО, 2004.

Многое в труде Аполлония поражает и нашего современника. Например, в пятой книге Аполлоний описывает кривую, разделяющую две плоские области, из точек одной из которых можно провести две нормали к эллипсу, из точек другой — четыре (а на самой кривой — три). Ныне эта кривая (огибающая семейства нормалей к эллипсу) известна, как астроида. Аполлонию удалось описать астроиду, уравнение которой $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{2/3}+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{2/3}=1$ было выписано в семнадцатом веке. Как всего этого можно добиться, не располагая средствами алгебры, чисто геометрически, — непостижимо уму нашего современника.

Но мы-то в школе проходим алгебру, и нам будет полегче изучать кривые Аполлония с ее помощью.

2.1. Декарт и теория плоских квадрик

В семнадцатом веке творили два великих французских ученых — Рене Декарт (1596–1650) и Пьер Ферма (1601–1665).

Им принадлежит фундаментальная для всего дальнейшего развития математики идея *арифметизации геометрии*. Они построили арифметические модели плоскости и пространства. Благодаря этой идее, в частности, геометрические задачи оказалось возможным решать алгебраическими средствами.

Напомним о том, что такое декартова модель плоскости. Нас в школе учат, как провести перпендикулярные прямые. Мысленно проведем их и выберем на каждой из них (одинаковый) масштаб. Тогда каждой точке плоскости соотнесется пара вещественных чисел (x_1, x_2) — ее координаты, а каждой геометрической фигуре — некоторое подмножество таких пар. Две основных фигуры геометрии древних — прямые и окружности — описываются так: прямые — линейными уравнениями $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, а окружности — специальными квадратичными уравнениями: $(x_1-\alpha_1)^2+(x_2-\alpha_2)^2=r^2$.

Если зафиксировать декартову систему координат на плоскости, то точки плоскости можно назвать по-другому — векторами. Их можно складывать по правилу параллелограмма и можно умножать на вещественные числа. В арифметической модели Декарта сложение двух векторов $x = (x_1, x_2)$ и $x' = (x'_i, x'_2)$ приводит к вектору $x + x' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$, а умножение вектора $x = (x_1, x_2)$ на число a дает вектор $ax = (ax_1, ax_2)$. Определим скалярное произведение $\langle x, x'\rangle$ векторов $x = (x_1, x_2)$ и $x' = (x'_1, x'_2)$ равенством $\langle x, x'\rangle = x_1x'_1 + x_2x'_2$. Пространство со скалярным произведением называют в конечномерном случае *евклидовым пространством*, а в бесконечномерном (при условии полноты) — *гильбертовым*. Мы построили таким образом двумерное евклидово пространство, которое обозначим $\mathbf{E}^2$.

Если $\langle x, x'\rangle = 0$ (т. е. скалярное произведение векторов равно нулю), векторы x и x' из $\mathbf{E}^2$ называют *ортогональными*, а вектор $x \in \mathbf{E}^2$ такой, что $\langle x, x\rangle = 1$, называют *единичным*. Эти термины находятся в соответствии с геометрическим взглядом на евклидову плоскость, в которой длина вектора $x = (x_1, x_2)$, согласно теореме Пифагора, равна $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. При этом скалярное произведение векторов, как нетрудно подсчитать, равно произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Посмотрим теперь как алгебраически описываются на евклидовой плоскости конические сечения Аполлония. В трехмерном пространстве троек (x_1, x_2, x_3) прямой круговой конус задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Рассмотрим его сечения плоскостями $x_3 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \beta$. Подставив в это равенство вместо x_3 выражение $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \beta$, после возведения в квадрат и приведения подобных получим такое уравнение: $Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$. Функции $x \mapsto Q(x)$ называют *квадратическими*, функции $x \mapsto q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \langle Ax, x\rangle$[4)], где $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$, $a_{21} = a_{12}$, называют *квадратичными формами*. Матрицу A со свойством $a_{21} = a_{12}$ называют *симметрической*. Каждая симметрическая матрица порождает с одной стороны объект алгебры и анализа — квадратичную форму (т. е. функцию двух переменных $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$), а с другой — геометрический объект — преобразование плоскости: $x \mapsto Ax$, когда точка $x = (x_1, x_2)$ плоскости переходит в точку $Ax = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$. Это преобразование обладает следующим свойством: $\langle Ax, x'\rangle = \langle x, Ax'\rangle$. Тогда говорят, что A задает симмерический оператор, преобразующий плоскость в себя.

Коники в арифметической модели Декарта — это линии уровня квадратичных функций, иначе говоря, это множества точек, удовлетворяющих уравнениям $Q(x) = 0$, где $Q(x) = \langle Ax, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + c$ — квадратичная

[4)] Правильнее было бы писать (в соответствии с предыдущим разделом) $\langle (Ax^T)^T, x\rangle$, но мы здесь при рассмотрении конечномерного евклидова случая позволяем себе более простую запись.

функция, и возникает задача привести саму функцию и изображаемую ею кривую к более «удобному» виду. Сделаем это в важнейшем, невырожденном случае, когда матрица A обратима (т. е. $\det A \neq 0$).

Сначала простейшей заменой переменных $x = y + a \Leftrightarrow x_1 = y_1 + a_1,\ x_2 = y_2 + a_2$ попробуем избавиться от линейных членов. Имеем: $0 = \langle Ax, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + c = \langle A(y+a), (y+a)\rangle + 2\langle b, (y+a)\rangle + c$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим равенство $\langle Ay, y\rangle + 2\langle b + Aa, y\rangle + c = 0$. Видно, что если положить $\widehat{a} = -A^{-1}b$ и $c' = c + 2\langle b, \widehat{a}\rangle$, получим, что в новых координатах уравнение кривой будет иметь вид: $\langle Ay, y\rangle + c' = 0$.

Продолжим наши алгебро-аналитические рассмотрения, а потом вскроем их геометрический смысл. Имеет место

Предложение 2.1. *Существует пара единичных ортогональных векторов e^1 и e^2, относительно которых невырожденная квадратичная форма $q(y) = \langle Ay, y\rangle$ приобретает диагональный вид*:

$$q(y) = \lambda_1 \langle y, e^1\rangle^2 + \lambda_2 \langle y, e^2\rangle^2,$$

где λ_1, $\lambda_2 \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу: *найти максимум функции q* при условии, что $y_1^2 + y_2^2 = 1$ (не ограничив себя в общности, можно считать, что среди значений q есть положительные). Из теоремы Вейерштрасса о достижении максимума непрерывной функции на компакте (см. с. 29) вытекает существование решения этой задачи (обозначим его e^1) (см. рис. 2). Теперь надо применить правило множителей Лагранжа. Если читатель не знает, что это такое, ему следует сначала прочитать следующий раздел, где это правило доказывается и в двумерном, и в многомерном, и в бесконечномерном случае. В применении к нашей задаче правило состоит в том, что найдется такой множитель Лагранжа λ_1, что производная по x функции Лагранжа

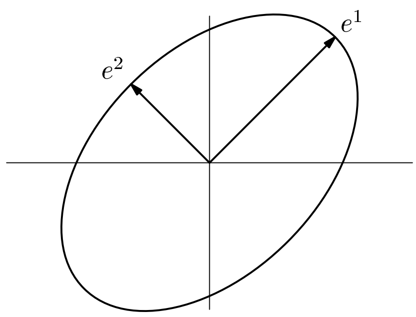

Рис. 2.

$\mathcal{L}(x, \lambda_1) = -\langle Ax, x\rangle + \lambda_1\langle x, x\rangle$ равна нулю (о производных функций двух и многих переменных см. с. 29; простые выкладки показывают, что производная функции $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ равна $2Ax$, функции $\langle b, x\rangle$ равна b, производная константы равна нулю). Отсюда вытекает, что $Ae^1 = \lambda_1 e^1$ и при этом λ_1 — это максимум в задаче (ибо $\langle Ae^1, e^1\rangle = \lambda_1 > 0$). Пусть теперь e^2 — единичный вектор, ортогональный e^1 (для нахождения такого вектора надо решить уравнения $\langle x, e^1\rangle = 0$, $\langle x, x\rangle = 1$). Тогда $\langle Ae^2, e^1\rangle = \langle e^2, Ae^1\rangle = \lambda_1\langle e^2, e^1\rangle = 0$, т. е. Ae^2 и e^2 пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности через λ_2. Значит, $y = \langle y, e^1\rangle e^1 + \langle y, e^2\rangle e^2$, откуда и следует, что $q(y) = \lambda_1\langle y, e^1\rangle^2 + \lambda_2\langle y, e^2\rangle^2$, λ_1, $\lambda_2 \neq 0$. □

Нетрудно понять, что вектор $\lambda_2 e^2$ является решением задачи о минимуме функции q при условии, что $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

Векторы e^i, $i = 1, 2$, построенные нами (обладающие свойством $Ae^i = \lambda_i e^i$), называются *собственными векторами оператора A*. Доказанный нами результат можно переформулировать так: *каждый симметрический оператор на евклидовой плоскости обладает базисом из собственных векторов*.

Теперь переведем всё это на язык геометрии. Моделью куска плоскости может служить поверхность стола, за которым нам приходится работать. Мысленно нарисуем на этом столе декартову систему координат. Но нам потребуется еще один экземпляр евклидовой плоскости. Письменные столы иногда накрывают прозрачным стеклом. Вообразим себе такой прозрачный бесконечно тонкий и в то же время бесконечно жесткий через все проникающий кусок плоскости. Снимем его с нашего письменного стола и поднесем к конусу (расположенному также где-то недалеко от нас). Пересечем этим куском плоскости все образующие конуса, обведем цветным карандашом по контуру сечения и обозначим точку на нашем куске плоскости, где он пересекается с центральной осью конуса. На нашем прозрачном куске плоскости образовалась кривая, которую Аполлоний назвал эллипсом, и внутри этого эллипса расположился его центр. Положим теперь опять наш кусок плоскости на плоскость нашего письменного стола, прорисуем контур эллипса с прозрачного куска на плоскость стола и вернемся к аналитическим рассмотрениям. Уравнение нарисованного эллипса в системе координат на столе, имеет вид $\langle Ax, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + c = 0$. Первое, что мы сделали, избавились от линейных членов. На языке геометрии это означает, что мы поместили новую декартову систему координат в центр эллипса (направив оси параллельно изначальным). А далее, взглянув на эллипс с новой системой координат (см. рис. 2), помещенной в его центр, мы заподозрили, что прямая, проходящая через максимально удаленные относительно центра точки и прямая, проходящая через минимально удаленные от центра точки, перпендикулярны друг другу.

Этот факт мы и доказали с помощью правила множителей Лагранжа. Повернув оси так, чтобы они пошли по прямым, соединяющим максимально и минимально удаленные точки, в новых осях получили уравнение $\lambda_1\langle y,e^1\rangle^2+\lambda_2\langle y,e^2\rangle^2=-c'$. В случае эллипса $-\lambda_i/c'>0,\ i=1,2$. А если бы мы сразу наш эллипс, нарисованный на прозрачной плоскости, «привезли» по столу и расположили в старой системе координат пустив его оси по осям координат, то получили бы уравнение $\left(\dfrac{x_1^2}{a_1^2}\right)+\left(\dfrac{x_2^2}{a_2^2}\right)=1$. Если же знаки $-\lambda_i/c'$ противоположны, то получили бы уравнение гиперболы: $\left(\dfrac{x_1^2}{a_1^2}\right)-\left(\dfrac{x_2^2}{a_2^2}\right)=1$.

Мы доказали, что невырожденная (и не являющаяся точкой $x_1^2+x_2^2=0$ или пустым множеством $x_1^2+x_2^2=-1$) кривая второго порядка — либо эллипс, либо гипербола.

2.2. Многомерный случай

Рассмотрим пространство векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ и определим скалярное произведение $\langle x,x'\rangle$ векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $x'=(x'_1,\dots,x'_n)$ равенством $\langle x,x'\rangle=\sum_{k=1}^n x_kx'_k$. Если $\langle x,x'\rangle=0$, векторы x и x' называют ортогональными, вектор x такой, что $\langle x,x\rangle=1$, называют единичным. Пусть $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $a_{ij}=a_{ji}$, — симметрическая матрица, а $q(x)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ — соответствующая ей квадратичная форма. Имеет место аналог предложения 2.1:

Предложение 2.2. *Существует базис из единичных ортогональных векторов $\{e^k\}_{k=1}^n$, относительно которых невырожденная квадратичная форма $q(x)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ приобретает вид*:

$$q(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_k\langle x,e^k\rangle^2,\quad \lambda_k\in\mathbb{R}.$$

Векторы e^k, $1\leqslant k\leqslant n$, являются *собственными векторами* оператора A, так что можно сказать, что в $\mathbb{R}^n$ имеется ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.

Этот результат принадлежит одному из выдающихся математиков 19 века — Карлу Якоби (1804–1851). Доказательство его совершенно аналогично двумерному, но мы его не приводим, ибо сам результат является частным случаем бесконечномерного обобщения, к рассмотрению которого мы переходим.

2.3. Бесконечномерный случай. Теорема Гильберта – Шмидта

Определение. Пусть $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гильбертово пространство. Линейный оператор $A\colon X \to X$ называется *симметричным* если $\langle Ax, x'\rangle = \langle x, Ax'\rangle$ для любых $x, x' \in X$.

Теорема 2. *Пусть* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *— сепарабельное гильбертово пространство и* $A\colon X \to X$ *— компактный симметричный линейный оператор. Тогда в* X *существует базис* $\{e^i\}$ *собственных векторов оператора* A. (Гильбертово пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное множество).

Этот результат был получен Гильбертом (1906) в пространстве l_2 бесконечномерных векторов $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ для которых $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k^2 < \infty$. В этом пространстве вводится скалярное произведение по естественной формуле $\langle x, x'\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k x_k'$, а оператор A задается бесконечной матрицей $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$. Затем результат Гильберта был обобщен его учеником Шмидтом на общий случай гильбертова пространства. (Существует легенда, что когда Шмидт рассказывал об этой теореме на семинаре, Гильберт спросил: «Шмидт, о каком-таком гильбертовом пространстве Вы говорите? Я не понимаю»).

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу о максимуме модуля квадратичной формы на единичном шаре:

$$|\langle Ax, x\rangle| \to \max, \quad \langle x, x\rangle \leqslant 1. \tag{1}$$

Из компактности оператора A следует непрерывность функции $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$. Из принципа существования Банаха – Алаоглу (см. с. 30; надо учитывать при этом, что гильбертово пространство совпадает со своим сопряженным, а единичный шар — выпуклое замкнутое ограниченное множество) вытекает, что решение e^1 задачи существует. Из правила множителей Лагранжа следует, что найдется такое число λ_1, что производная по x функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda_1) = -\langle Ax, x\rangle + \lambda_1\langle x, x\rangle$ равна нулю, что приводит к соотношению $Ae^1 = \lambda_1 e^1$. Рассмотрим новую экстремальную задачу

$$|\langle Ax, x\rangle| \to \max, \quad \langle x, x\rangle \leqslant 1,\ \langle x, e^1\rangle = 0. \tag{2}$$

Применение принципа существования и правила множителей Лагранжа приводит к равенству $Ae^2 = \lambda_2 e^2$. Продолжая процесс дальше, будем получать систему собственных чисел, стремящуюся к нулю (из-за компактности оператора). Затем надо взять пространство, ортогональное всем построенным e^k с не равными нулю собственными числами, и выбрать в нем ортонормированный базис (с нулевыми собственными значениями). Это приводит к искомому базису в X. $\square$

Читателю, знакомящемуся с этой теоремой впервые, рекомендуется провести подробное доказательство теоремы в трехмерном случае.

* * * * * *

Приложения доказанной теоремы совершенно неисчислимы — к решению смешанных задач для гиперболических уравнений, краевых задач для параболических уравнений, к гармоническому анализу, теории представлений, квантовой механике и т. д., и т. п. Кое-какие приложения мы обсудим далее.

* * * * * *

Так завершилась наша вторая экскурсия от Аполлония к Гильберту и Шмидту.

3. Начала математического анализа

3.0. Ньютон и Лейбниц — рождение анализа

Первой публикацией по анализу была коротенькая заметка Лейбница, появившаяся в 1684 году в журнале “Acta Eruditotum” — одном из первых научных журналов в истории науки. Статья была озаглавлена так: “Nova metodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare proillis calculus gemes” (Новый метод про максимумы и минимумы и определение касательных, не изменяющий в случае дробных или иррациональных величин и специальный способ исчисления к нему; выдержки из нее можно прочитать в упомянутой в первом разделе книге Вилейтнера на с. 272). В заглавии встречается слово “calculus” — *исчисление*. С чуть более поздней поры так и повелось: “differential and integral calculus” — дифференциальное и интегральное исчисление. Название заметки свидетельствует о стимулах, которые руководили ее автором при создании анализа: это — задачи на экстремум (т. е. на максимум и минимум) и проблемы геометрии.

Но необходимо сказать, что двумя десятилетиями ранее к основным концепциям дифференциального исчисления совсем с другой стороны пришел Ньютон. В 1671 году он представил рукопись работы “The Method of Fluctions and infinite Series with its Applications to the Geometry of Curves-Lines” (Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением к геометрии кривых — см. И. Ньютон, «Математические работы», М.-Л., ОНТИ, 1937), сохранившей свое значение и в наше время.

Не указываю ни имен, ни лет жизни этих двух великих ученых — это должен знать каждый, не пишу об их национальной принадлежности, ибо прежде всего они принадлежат всему человечеству.

Ньютон с самого начала строил дифференциальное и интегральное исчисление, как аппарат естествознания. (О том, как устроен ньютонов мир, читатель может узнать из его “Principia” — «Математических началах натуральной философии» (1687) (см. Собрание сочинений трудов А. Н. Крылова, том VII, где помещен перевод «Математических начал»; Лагранж назвал это сочинение Ньютона «величайшим из произведений человеческого ума»).

«Для пояснения искусства анализа, — писал Ньютон, — остается привести некоторые примеры задач [...]. 1) Пусть длина пути известна. Нужно узнать скорость в данный момент времени. 2) Пусть известна скорость движения. Надо узнать длину пройденного пути.» (См. И. Ньютон, «Математические работы», М.-Л., ОНТИ, с. 45.)

И ведь действительно, если попытаться осмыслить понятие «скорости в данный момент» объекта, движущегося неравномерно, то неизбежно приходишь к идее *предела средней скорости за малый промежуток времени при стремлении этого промежутка к нулю*. Иначе говоря, если объект движется по прямолинейной дороге неравномерно, и $x(t)$ — расстояние его от какой-то начальной точки в момент времени t, то скорость $v(t)$ в момент t это предел отношения средних скоростей за малый промежуток времени при стремлении этого промежутка к нулю, т. е. $\lim \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ при Δt стремящемся к нулю. Эту величину стали обозначать $x'(t)$ (а Ньютон обозначал $\dot{x}(t)$).

(И само понятие предела Ньютон осознавал абсолютно отчетливо. Вот его слова: «Количества [...], которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приближаются друг к другу ближе, нежели на любую заданную величину, будут в пределе равны.» Это почти определение предела по Коши, которому нас учат на первом курсе.)

Большинство основных фактов дифференциального исчисления имеют физическую или геометрическую интерпретацию.

Скажем, вот вы идете со скоростью v по вагону поезда, движущегося со скоростью V. Тогда ваша скорость относительно Земли равна $V+v$. Так иллюстрируется формула дифференциального исчисления: *производная суммы равна сумме производных*.

«Когда величина достигает наибольшего или наименьшего значения, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад» (см. «Математические работы», с. 73). Это высказывание на физическом языке выражает то, что в курсах анализа называют теоремой Ферма: *в точке экстремума производная равна нулю* (о том, что сказано по этому поводу самим Ферма см. в книге Вилейтнера на с. 256). Если вы куда-то ездили по прямолинейной дороге и вернулись обратно, то в какой-то момент вы оказались в наиболее удаленной точке от начала. Там вы «не текли ни назад, ни вперед», ваша скорость равнялась нулю. Это — физическая интерпретация теоремы Ролля: *если функция непрерывна на отрезке, дифференцируема внутри него и на концах отрезка принимает одинаковые значения, то в некоторой внутренней точке ее производная равна нулю.*

Но довольно о дифференциальном исчислении. Скажем несколько слов об обратной задаче — как найти путь по скорости. И снова, если задуматься об этом, то никакой другой возможности не придумать, как только разделить время на мелкие кусочки и считать скорость на этих маленьких участках постоянной, равной значению ее в какой-то промежуточной точке, а потом уменьшать разбиение и переходить к пределу, который обозначают: $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$ (t_0 — начальная точка движения, t_1 — конечная, $v(t)$ — скорость в момент t) и называют *определенным интегралом* от скорости $v(\cdot)$ в пределах от t_0 до t_1.

Подведем итог: производная пути по времени $x'(t)$ — это скорость $v(t)$, а определенный интеграл, восстанавливающий пройденный путь $x(t)$ по скорости — это площадь под графиком скорости. И если теперь сопоставить все сказанное, то мы приходим к такому результату:

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} x'(t)dt.$$

Это не что иное, как знаменитая формула Ньютона – Лейбница, которую иногда называют *основной формулой интегрального исчисления.* Она связывает два исчисления друг с другом.

А теперь перейдем к обсуждению одной из важнейших теорем анализа — теоремы об обратном отображении. Здесь мы собираемся повторить (и даже с некоторым усилением) то, что уже дважды делали: сначала мы сформулируем теорему в одномерном случае, затем в многомерном, и наконец, в бесконечномерном случае, а доказывать все эти результаты будем одновременно, и читатель убедится в том, что в бесконечномерном случае доказательство не отличается от одномерного, надо только знать о «бесконечномерности» нечто просто формулируемое, но фундаментальное.

Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, или $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$, или $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, U — окрестность нуля в X, $F\colon U \to Y$, $F(0_X) = 0_Y$.

Определение. Говорят, что F *строго дифференцируема в начале координат пространства* X (и пишут $F \in SD^1(0)$) если существует число $F'(0)$ (соответственно — матрица $F'(0)$ или в самом общем случае — линейный непрерывный оператор $F'(0)\colon X \to Y$) такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|F(x') - F(x) - F'(0)(x'-x)\|_Y < \varepsilon\|x'-x\|_X$, если только $\|x\|_X < \delta$, $\|x'\|_X < \delta$, где в конечномерном случае $\|x\|_X = |x|$ и $\|y\|_Y = |y|$.

Отметим, что строго дифференцируемая в $\widehat{x}$ функция дифференцируема в точке $\widehat{x}$ и непрерывна в некоторой окрестности $\widehat{x}$. Не всякая дифференцируемая функция строго дифференцируема, это показывает пример функции $F(x) = x^2D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле, равная нулю в иррациональных точках и единице в рациональных. (Функция F непрерывна и дифференцируема в нуле и разрывна всюду, кроме нуля.)

3.1. Теорема об обратной функции в одномерном случае

Теорема 3 а) об обратной функции. *Пусть U — окрестность нуля в $\mathbb{R}$, $F\colon U \to \mathbb{R}$ — строго дифференцируемая в нуле функция, причем $F'(0) \neq 0$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $K > 0$ что для любого числа $|y| < \delta$ найдется (единственное) число $x = x(y)$, $|x| < \varepsilon$ такое, что $F(x) = y$ и $|x| \leqslant K|y|$.*

Теорема 3 а) восходит к Ньютону. Он изложил (на примере решения уравнения $y^3 - 2y - 5 = 0$) метод вычислений корня этого уравнения, ныне всем известный как *метод Ньютона*, в своей работе «Анализ с помощью уравнений...» («Математические работы», с. 9).

Ньютон был замечательным вычислителем. В середине семидесятых годов семнадцатого века начал тлеть приоритетный спор между Ньютоном и Лейбницем об открытии анализа. С запросом по поводу того, что известно Ньютону о математическом анализе, обратился к нему ученый секретарь Королевского общества Ольденбург. Ньютон несколько раз отвечал своему респонденту. Во втором письме Ольденбургу, отправленном "24 октября 1676 г. от Рождества Христова" (и подлежащем, как указывает Ньютон, быть сообщенным Лейбницу, о нем мы еще будем иметь повод вспомнить), Ньютон пишет, что «мне прямо стыдно признаться, до какого числа знаков я довел на досуге эти вычисления» (речь шла о вычислении логарифмов — см. «Математические работы», с. 237).

Ниже мы излагаем менее быстрый, чем собственно метод Ньютона, но более удобный метод решения нелинейных уравнений.

Нам надлежит решить уравнение $F(x) = y$. Будем искать его итеративно $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{F'(0)}(y - F(x_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$. Эта процедура (называемая *модифицированным методом Ньютона*), изображена на рис. 3. (В методе Ньютона $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{F'(x_{n-1})}(y - F(x_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$). Оставим обоснование сходимости модифицированного метода Ньютона к $x(y)$ до последнего раздела, где будем доказывать теорему одновременно в одномерном, многомерном и бесконечномерном случаях.

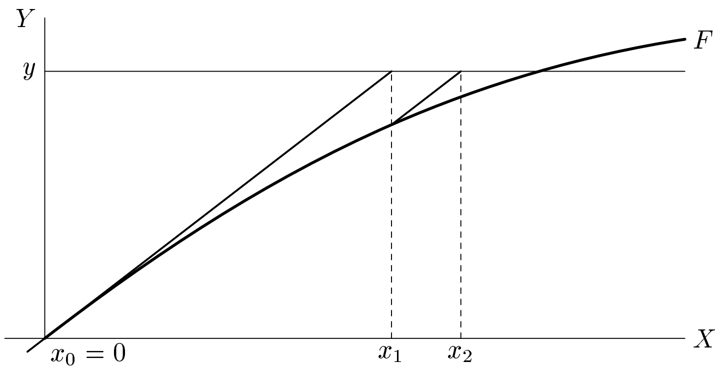

Рис. 3.

3.2. Многомерный случай

Рассмотрим частный вариант многомерного случая, когда $n = m$. Пусть требуется решить систему из n нелинейных уравнений

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n.$$

Введем, как мы не раз уже делали, сокращенные обозначения:

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда наша задача примет такой вид: решить уравнение $F(x) = y$. Решение будем искать точно также — модифицированным методом Ньютона: $x_n = x_{n-1} + (F'(0))^{-1}(y - F(x_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, где $(F'(0))^{-1}$ означает обратную матрицу. Доказательство проведем в следующем разделе.

3.3. Общий случай (одномерный, конечномерный и бесконечномерный; правило множителей Лагранжа)

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, а $Y = \mathbb{R}^m$ и $A\colon X \to Y$ — линейный сюръективный оператор. Тогда существует правый обратный оператор $R\colon Y \to X$ такой, что $ARy = y$ и $|R(y)| \leqslant C|y|$ (где C — некоторая константа). Действительно, надо взять базис $\{e^i\}_{i=1}^m$ в Y, элементы f^i, $1 \leqslant i \leqslant m$, из прообраза $A^{-1}e^i$ и для $y = \sum_{i=1}^m y_i e^i$ положить $R(y) = \sum_{i=1}^m y_i f^i$. (Тогда $|R(y)| \leqslant \sum_{i=1}^m |y_i| \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |f^i| \leqslant \sqrt{m} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |f^i||y|$).

Если же $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства и $A\colon X \to Y$ — линейный, непрерывный сюръективный оператор, то существование правого обратного оператора с приведенными выше свойствами есть факт, равносильный принципу открытости Банаха (см. с. 29 и приложение).

Теорема 3 в) (об обратном отображении). *Пусть $X = Y = \mathbb{R}$, соответственно $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$, или в самом общем случае $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, U — окрестность нуля в X, $F\colon U \to Y$, $F \in SD^1(0)$, $F(0_X) = 0_Y$ и более того $F'(0)X = Y$ (в случае $X = Y = \mathbb{R}$ это означает, что $F'(0) \neq 0$, в случае $X = Y = \mathbb{R}^n$, что $\det F'(0) \neq 0$ (см. 1.2)). Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $K > 0$, что для любого числа $|y| < \delta$ (соответственно, вектора $|y| < \delta$ в конечномерном случае или элемента $\|y\|_Y < \delta$ в банаховом случае) существует число $x = x(y)$, $|x| < \varepsilon$ (соответственно — вектор $x = x(y)$, $|x| < \varepsilon$ или элемент $x = x(y) \in X$, $\|x\|_X < \varepsilon$) такие, что $F(x) = y$ и $|x| \leqslant K|y|$ в конечномерном и $\|x\|_X \leqslant K\|y\|_Y$ в банаховом случае.*

Доказательство. Пусть в одномерном случае R — это число $\dfrac{1}{F'(0)}$, в многомерном случае, если $m = n$, — матрица $(F'(0))^{-1}$, а в остальных случаях — правый обратный для $F'(0)$ оператор. Определение строгой дифференцируемости влечет за собой существование такого $\delta > 0$, что если $\|x\|_X < \delta$, $\|x'\|_X < \delta$, то выполняется неравенство

$$\|F(x') - F(x) - F'(0)(x' - x)\|_Y < \frac{1}{2C}\|x' - x\|_X, \qquad (i)$$

где C — константа из теоремы о правом обратном (см. с. 29). Пусть при этом $U_X(0,\delta) = \{x \in X \mid \|x\|_X < \delta\} \subset U$ и F непрерывна в $U_X(0,\delta)$. Выбрав $\varepsilon < \dfrac{\delta}{8C}$, рассмотрим итеративную процедуру модифицированного метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n + R(y - F(x_n)), \quad n \geqslant 0,\ x_0 = 0, \qquad (ii)$$

где в конечномерном случае $\|\cdot\| = |\cdot|$. Покажем, что все x_j, $j \in \mathbb{N}$, лежат в $U_X(0,\delta)$. Применим метод математической индукции. Имеем: $\|x_1\|_X \leqslant C\|y\|_Y < \delta$, значит, $x_1 \in U_X(0,\delta)$. Пусть $x_k \in U_X(0,\delta)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда получим

$$-y + F(x_{k-1}) - F'(0)(x_k - x_{k-1}) \overset{(ii)}{=} 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n \qquad (iii)$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\|_X &\overset{\operatorname{def} R}{\leqslant} C\|y - F(x_n)\|_Y \overset{(iii)}{=} \\ = C\|y - F(x_n) - y + F(x_{n-1}) &+ F'(0)(x_n - x_{n-1})\|_Y \overset{(i)}{\leqslant} 1/2\|x_n - x_{n-1}\|_X \leqslant \\ &\leqslant 1/4\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_X \leqslant \ldots \leqslant 1/2^{n-1}\|x_1\|_X\,. \qquad (iv)\end{aligned}$$

Из (iv) и неравенства треугольника следует, что

$$\|x_{n+1}\|_X < 2\|x_1\| < \delta, \tag{v}$$

т. е. элементы x_n определены для всех n, а $\|x_n - x_{n+m}\|_X \leqslant 1/2^{n-1}\|x_1\|_X$, откуда вытекает, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность. Переход к пределу в (ii) (существующий из-за непрерывности F в $U(0_X, \delta)$) приводит к равенству $F(x(y)) = y$, а переход к пределу в (v), учитывая, что $\|x_1\|_X \leqslant C\|y\|_Y$, обеспечивает неравенство $\|x(y)\|_X \leqslant K\|y\|_Y$ с $K = 2C$. □

Приведем одно из важнейших следствий этой теоремы: правило множителей Лагранжа.

Пусть X и Y это $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, $m < n$, или банаховы пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$, U — окрестность точки $\widehat{x}$ в X, $f_0\colon U \to \mathbb{R}$, $F\colon U \to Y$. Рассмотрим задачу о нахождении точек экстремума (т. е. максимума или минимума функции f_0 при ограничении типа равенства $F = 0$):

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad F(x) = 0. \tag{P}$$

Говорят, что элемент $\widehat{x}$ доставляет локальный минимум (максимум) задаче (P) (и пишут $\widehat{x} \in \mathrm{locmin}$ (locmax)), если существует такая окрестность V точки $\widehat{x}$, что для точки $x \in V$, для которой $F(x) = 0$, выполнено неравенство $f_0(x) \geqslant f_0(\widehat{x})$, $(f_0(x) \leqslant f_0(\widehat{x}))$.

Если $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, положим $F(x) = f_1(x)$ и $\mathcal{L}(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x)$ (здесь λ —число); если $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ положим $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$ и $\mathcal{L}(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ (здесь $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор); если $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, положим $\mathcal{L}(x,\lambda) = f_0(x) + \langle\lambda, F(x)\rangle$, где λ — элемент сопряженного пространства Y^*, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартная билинейная форма на $Y^* \times Y$ ($\langle\lambda, x\rangle$ — это значение на элементе x линейного функционала λ). Написанные выражения называются *функцией Лагранжа* задачи (P).

Следствие (правило множителей Лагранжа). *Пусть в* (P) f_0, $F \in SD^1(0)$, $F'(0)X = Y$. *Если* $\widehat{x}$ *локальный экстремум* (P), *тогда найдется множитель Лагранжа* λ (*число, вектор или элемент пространства* Y^*, *сопряженного с* Y), *такой, что*

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0. \tag{3.1}$$

Расшифруем сказанное в конечномерных случаях. Если $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, то соотношение (3.1) означает, что $f_0'(\widehat{x}) + \lambda f_1(\widehat{x})$, т. е., что градиенты $f_0'(\widehat{x})$ и $f_1'(\widehat{x})$ пропорциональны (и если понимать геометрический смысл градиента функции на плоскости, то это утверждение становится почти очевидным), а если $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, то (3.1) означает, что

$f_0'(\widehat{x})+\sum_{i=1}^m f_i'(\widehat{x})=0$, т. е., что градиент $f_0'(\widehat{x})$ является линейной комбинацией градиентов ограничений.

Доказательство. Доказательства следствия во всех случаях сходны и просты. Если бы в случае $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}$ градиенты не были бы пропорциональны, то к отображению $\Phi(x)=(f_0(x),f_1(x))$ можно было бы применить теорему об обратном отображении и найти элемент x_α такой, что $\Phi(x)=(\alpha,0)$, для которого $f_0(x_\alpha)=\alpha$, $f_1(x_\alpha)=0$ и $|x_\alpha|\leqslant K|\alpha|$, а это противоречит тому, что $\widehat{x}\in \operatorname{locextr}$. Совершенно аналогично приходим к противоречию во втором случае, если градиент $f_0'(\widehat{x})$ не является линейной комбинацией градиентов ограничений (и градиенты ограничений линейно независимы). А в бесконечномерном случае либо $\Phi'(\widehat{x})X=Y\times\mathbb{R}$, либо нет. В первом случае применяем теорему об обратном отображении и приходим к противоречию, а во втором надо воспользоваться нетривиальностью аннулятора подпространства $\Phi'(\widehat{x})X\subset Y$. □

В бесконечномерном случае правило множителей Лагранжа было доказано Л. А. Люстерником.

* * * * * *

Наше третье путешествие длилось более, чем два с половиной столетия с 1671 года, когда Ньютон представил «Метод флюксий» по 1934 г., когда Л. А. Люстерник опубликовал теорему о правиле множителей Лагранжа в банаховом случае. Но наш следующий путь будет короче, хотя он будет менее элементарен.

4. Дифференциальные уравнения

4.0. О пользе решения дифференциальных уравнений

В 17 веке было принято зашифровывать свои основные мысли в анаграммах. В том самом втором письме Ольденбургу, о котором мы упоминали в предыдущем разделе, Ньютон пишет:

> «Сущность этих действий [...] я лучше передам в следующем скрытом виде: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx».

Текст анаграммы, раскрытый им впоследствии, таков: Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa. Вот перевод этой фразы: *по данному уравнению, содержащему флюенты, найти флюксии и обратно.* Термины «флюента» и «флюксия» были введены самим Ньютоном. Флюента по Ньютону — изменяющаяся величина, сейчас наиболее точно переводимая словом «функция». Флюксия — это скорость изменения флюенты, так что по сути дела в своей анаграмме Ньютон повторяет то, о чем мы уже говорили: суть анализа в нахождении скорости по пути и наоборот.

Один из крупнейших математиков современности — В. И. Арнольд — предложил такой вольный перевод анаграммы Ньютона: «*Полезно решать дифференциальные уравнения*» (В. И. Арнольд, «Избранное–60». М.: Фазис, 1997, с. 319.). Воспользуемся этим «полезным советом» Ньютона – Арнольда, тем более, что главную концепцию «Principia» можно выразить словами: «Мир управляется дифференциальными уравнениями».

Пусть $f = f(t,x)\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$). Далее рассматриваются дифференциальные уравнения вида $\dot{x} = f(t,x)$. Задача: *решить дифференциальное уравнение* $\dot{x} = f(t,x)$ *с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ называется *задачей Коши*.

4.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Начнем с простейших уравнений. Простейшее неоднородное дифференциальное уравнение $\dot{x} = v$, $x(t_0) = x_0$ обсуждалось в предыдущем разделе. Его решение дается интегралом $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s)ds$. Здесь мы начнем с простейшего *однородного* уравнения: $\dot{x} = x$. Для решения задачи Коши $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$ этого уравнения, рассмотрим отображение $F\colon C([-a,a]) \to C([-a,a])$, $F(x(\cdot))(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds$. Нетрудно показать, что некоторая степень F^n этого отображения (зависящая от a) является сжимающей, и значит, в силу следствия из принципа сжимающих отображений и полноты пространства $C([-a,a])$, существует единственный элемент $\widehat{x}(\cdot)$ такой, что $F(\widehat{x}(\cdot))(t) = \widehat{x}(t)$, получаемый итерациями $x_{n+1}(t) = F(x_n(\cdot))(t)$, $n \geqslant 0$, $x_0(\cdot)$ — произвольный элемент.

Если начать итеративную процедуру с функции $x_0(t) = 1$, мы получим $x_1(t) = 1+t$, $x_2(t) = 1+t+\dfrac{t^2}{2}$, …, $x_n(t) = \sum_{k=0}^n \dfrac{t^k}{k!}$. Эти суммы равномерно сходятся к функции $t \to e^t$.

Решение задачи Коши $\ddot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ для уравнения гармонического осциллятора (выражающего второй закон Ньютона для частицы, притягивающейся к началу согласно закону Гука) сводится к нахождению неподвижной точки оператора $F(x(\cdot))(t) = t - \int_0^t (t-s)x(s)ds$. Стартуя от $x_0(t) = t$, приходим к ряду для синуса (убедитесь в этом самостоятельно).

Для уравнения $\dot{x} = A(t)x$, где $A(\cdot)$ — непрерывная функция, итеративная процедура приведет к решению $x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$. Для неоднородного уравнения $\dot{x} = A(t)x + a(t)$ выпишется тот же ответ, что и методом Лагранжа вариации постоянных. Систему двух уравнений: $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, $x_1(t_0) = \xi_1$, $x_2(t_0) = \xi_2$ с постоянными коэффициентами можно свести к одному уравнению второго порядка: $\ddot{x} + p\dot{x} + q = 0$. Если корни λ_i, $i = 1,2$, различны, то общее решение $x(t, C_1, C_2) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, а если корни одинаковы и уравнение не распадается, то общее решение таково: $x(t, C_1, C_2) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$.

Эти результаты принадлежат, в основном, Эйлеру.

4.2. Общая теория линейных дифференциальных уравнений

Для решения задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + y(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

где $A(\cdot)$ — непрерывная размера $n \times n$ матричная функция, а $y(\cdot)$ — непрерывная n-мерная вектор-функция, снова рассмотрим отображение $F\colon C([-a,a],\mathbb{R}^n) \to C([-a,a],\mathbb{R}^n)$, $F(x(\cdot))(t) = x_0 + \int_0^t (A(s)x(s) + y(s))\, ds$. Показывается, что некоторая степень F является сжимающим отображением. Из принципа сжимающих отображений следует существование неподвижной точки, что доказывает глобальную теорему существования задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений, согласно которой на всем интервале $(-a, a)$ существует и единственно решение задачи (4.1).

4.3. Общая теория дифференциальных уравнений (существование, непрерывная и дифференцируемая зависимость решений)

Теорема 4 а) (локальная теорема существования решений). *Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ функция $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, $f = f(t,x)$, удовлетворяет условию Липшица относительно x: $|f(t,x) - f(t,x')| \leqslant M|x - x'|$ для любых x, $x' \in G$, и пусть компакт $\mathcal{K}$ принадлежит G. Тогда для любой точки $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in \mathcal{K}$ существуют такие число $\delta > 0$ и окрестность V точки $\widehat{x}$, что для любой точки (t_0, x_0), удовлетворяющей условиям $|t_0 - \widehat{t}| < \delta$ и $x_0 \in V$, существует единственное решение $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$ задачи Коши*:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.3}$$

определенное на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и непрерывное по совокупности переменных.

в) (о непрерывной зависимости решения от параметров). *Пусть $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $\mathcal{A}$ — топологическое пространство, $f\colon G \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ — функция переменных (t, x, α), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$, непрерывна по совокупности переменных и строго дифференцируема по x равномерно по α в произведении $[t_0, t_1]$ на окрестность W точки $(\widehat{x}, \widehat{\alpha})$ (расположенном в $G \times \mathcal{A}$). Тогда существует такая окрестность*

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, *что решение задачи Коши*

$$\dot{x} = f(t, x, \alpha), \quad x(t_0) = x_0$$

определено на отрезке $[t_0, t_1]$ *и непрерывно зависит от параметра* α.

Строгая дифференцируемость, равномерная по параметру α, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W_0 \subset W$ такая, что $|f(t,x,\alpha) - f(t,x',\alpha') - f_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{\alpha})(x - x')| < \varepsilon|x - x'|$, если $t \in [t_0, t_1]$, (x, α) и (x', α) принадлежат W_0.

с) (о зависимости решений от параметров и граничных условий). *Пусть* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ *— окрестность нуля в* $\mathbb{R}^m$ *и* $f\colon [t_0, t_1] \to G \times \mathcal{U}$ *— функция, непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных. Если* $\widehat{x}(\cdot)$ *— решение задачи Коши, то существует* $\delta > 0$ *и для любого* $|u| < \delta$ *— решение* $x(\cdot, u, w)$ *задачи Коши* $\dot{x} = f(t, x, u)$, $x(t_0) = w$, *непрерывно-дифференцируемо зависящее от граничного условия* w *и параметра* u.

Дадим набросок доказательств теорем а) и b).

а) Рассмотрев отображение $F(x(\cdot))(t) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$, убеждаемся, что при малом d оно удовлетворяет условию сжимаемости в $C([t_0 - d, t_0 + d], \mathbb{R}^n)$, и теорема а) следует из принципа сжимающих отображений (и полноты пространства $C([t_0 - d, t_0 + d], \mathbb{R}^n)$.

Для доказательства теоремы b) надо применить метод Ньютона к отображению $F((x(\cdot), \alpha))(t) = \widehat{x}(t) + x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{x}(s) + x(s), \alpha)ds$ из пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ в пространство $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ для решения уравнения $F = 0$, начиная с функции $x_0(t) \equiv 0$. Основное условие применимости метода Ньютона о сюръективности отображения F выполняется, ибо производная этого отображения $F'(0, \widehat{\alpha}))(t) = x(t) - \int_{t_0}^{t} f_x(s, \widehat{x}(s), \widehat{\alpha})x(s)ds$ отображает пространство $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ на пространство $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ в силу теоремы существования для линейных систем.

Теорема с) также доказывается прямым применением метода Ньютона.

* * * * * *

Остановимся здесь, чтобы подвести некоторые итоги. Как связаны четыре наши теоремы с окружающим нас миром?

Ньютон научил нас тому, что эволюционные процессы и явления описываются (обыкновенными) дифференциальными уравнениями. Второй закон Ньютона описывает движения взаимодействующих частиц. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (теорема 4) выражает идею лапласовского детерминизма: если бы Некто мог в одно мгновение узнать все скорости и положения частиц Мира, он знал бы о том, что было в прошлом и узнал бы, все, что случится в будущем. Это вольный пересказ того, о чем не раз говорил Лаплас. Два столетия идея предопределенности была одной из философских доминант (совсем недавно, каких-то полстолетия тому назад, все дороги вели к коммунизму). И лишь недавно в период *современной математики* обнаружилось, что чаще всего детерминированные процессы в итоге запутываются и скорее напоминают хаотическое движение. Но это уже другая история.

Эйлер писал как-то, что в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума. Среди прочего имелись в виду *вариационные принципы* в естествознании. Соответствующая математическая теория опирается на правило множителей Лагранжа (см. следствие из теоремы 3). И мы этим следствием подошли совсем близко к тому, чтобы охватить основы вариационной теории и ее приложений к естествознанию.

Тяжелый удар «предопределенности» примерно столетие тому назад был нанесен зарождавшейся квантовой механикой. В двадцатые годы родились две теории — Гейзенберга и Шрёдингера, не слишком похожие друг на друга. И вот ведь какая случилась удача: один из молодых людей, кто имел контакты с творцами квантовой механики, а именно Макс Борн, когда-то в Геттингене слушал Гильберта и Шмидта про симметрические операторы. Он-то и понял, что в рассмотрениях этих операторов в гильбертовом пространстве и лежит родство двух ветвей теории. Такую роль (среди многих иных) сыграла наша теорема 2. А еще с ее помощью решаются смешанные задачи для гиперболических уравнений (см. О. А. Олейник, «Лекции об уравнениях с частными производными», М.: БИНОМ, 2005), краевые задачи теории параболических уравнений.

Помимо частиц существуют тела — струны, балки, мембраны и все такое прочее. И часто случается так, что подобно тому, как решение обыкновенного дифференциального уравнения сводится к интегрированию, так решение уравнений с частными производными описываются интегральными уравнениями (см. упоминавшуюся книгу Петровского по интегральным уравнениям). И здесь важнейшую роль играет теорема 1. И все это лишь доля той пользы, которую могут принести эти теоремы. Так что мы их доказывали не зря.

Приложение. Принципы существования

Принцип компактности Вейерштрасса – Лебега – Бэра. *Функция, полунепрерывная снизу на компакте, принимает свое минимальное значение.*

Доказательство. Обозначим $U_n := X \setminus \mathcal{L}_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\dots \subset U_n \subset U_{n-1} \subset \cdots$. Из определения полунепрерывности снизу следует, что U_n открыты, т. е. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — открытое покрытие X. Тогда из определения компактности получаем, что существует такое число $m \in \mathbb{Z}$, что $X = U_m$, т. е. f ограничена снизу. Пусть $\mu = \inf f$ на X. Если $f(x) \neq \mu$, обозначим $V_n := X \setminus \mathcal{L}_{\mu+(1/n)}(f)$, $n \in \mathbb{N}$. Из определений полунепрерывности снизу и нижней грани следует, что $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие X. Значит, в силу компактности, найдется такое число $s \in \mathbb{N}$, что $X = V_s$, т. е. $f > \mu + 1/s$. Противоречие с тем, что $\mu = \inf f$. $\square$

Принцип сжимающих отображений Пикара – Каччиополли – Банаха. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Взяв произвольный элемент $x_0 \in X$, положим $x_n = F(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_m) &\leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) = \\ &= d(F(x_{n+m-1}), F(x_{n+m-2})) + \ldots + d(F(x_m), F(x_{m-1})) \leqslant \\ &\leqslant d(x_1, x_0)(\theta^{n+m-1} + \ldots + \theta^{m-1}). \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство — это неравенство треугольника, а второе неравенство следует из сжимаемости. Полученная оценка показывает, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна и сходится к элементу $\widehat{x} \in X$. Имеем: $d(F(\widehat{x}), x_{n+1}) = d(F(\widehat{x}), F(x_n)) \leqslant \theta d(\widehat{x}, x_n) \to 0$, значит, $d(F(\widehat{x}), \widehat{x}) = 0$, что равносильно $\widehat{x} = F(\widehat{x})$. Единственность легко следует из сжимаемости. $\square$

* * * * * *

И в заключение несколько слов о том, как, по моему мнению, и чему надо учить математике. Я бы выделил пять стадий — четыре, как в каждой из моих лекций, и еще пятую. До школы и в начальной школе разумно научить дитя считать и дать импульс к размышлению. Мои начальные фрагменты лекций призваны дать такие импульсы к размышлениям.

Компьютерам дети научаются сами, но логику, понимание того, что есть научная истина, человек (пока еще) не может извлечь из машины, его надо этому учить, начиная со школы.

На каком-то уровне каждому надо сделать выбор своей жизненной дороги — гуманитарной или научно-технической. Во втором случае разумно приступить к изучению математического анализа. Вторые фрагменты моих лекций обращены к тем, кто хочет узнать о математике, как о предмете, соответствующем выбору их жизненного пути.

На первых курсах технических, экономических и естественно-научных институтов и университетов надо освоить технические основы нашей науки (начала исчислений, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений, комплесного анализа и теории вероятностей). В третьих разделах моих лекций рассказывается о началах линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений.

А потом, в институтах с хорошей математикой и в университетах я предложил бы читать некий сводный курс математики, где все выстраивалось бы в единую гармоничную картину. Из фрагментов такого курса состоят четвертые части моих лекций, в которых я постоянно подчеркивал, что дистанция между истоком и так сказать «устьем» в каждой нашей теме была невелика. По-видимому, потоки человеческой мысли слишком причудливы и потому так долго текли от своего начала к естественному концу.

Вот вам четыре стадии: начальная школа, средняя и специализированная школа, пропедевтическое институтское или университетское образование и сводный курс математики.

А пятая — обещанная — часть? Пятая часть — *современная математика*. Как учить современной математике и чему? Вот вопрос. Давайте поразмышляем. Но в другой раз.

В. М. Тихомиров, мехмат МГУ
E-mail: tikhomir@mccme.ru