Олимпиады и математика

А. Б. Скопенков

Перед учителями и руководителями кружков, занимающимися с сильными школьниками, встает вопрос: как подготовить школьников к олимпиадам или к «серьезной» математике? Некоторые думают, что для первого надо прорешивать задачи последних олимпиад, для второго надо читать научную литературу, и что ввиду принципиальной разницы первого и второго бессмысленно пытаться достичь и того, и другого. Автор этой заметки придерживается распространенного мнения о том, что эти подходы недостаточно эффективны и приводят к вредным «побочным эффектам»: школьники либо чрезмерно увлекаются *спортивным* элементом в решении задач, либо изучают *язык* высшей математики вместо ее содержательной стороны.

Мне кажется, что основу математического образования сильного ученика должно составлять *решение и обсуждение мотивированных для ученика задач, в процессе которых он знакомится с важными математическими идеями и теориями.* Это одновременно подготовит школьника и к математической науке, и к олимпиадам, и не нанесет вред его развитию в целом; это будет более эффективно и для достижения успеха только в олимпиадах или только в науке (если не учитывать большого количества других факторов, кроме разумной организации занятий).

Как и при естественном развитии самой математики, каждая следующая задача должна быть мотивирована либо практикой, либо уже решенными задачами. Поэтому ученик, занимающийся «мотивированной для него» математикой (обычно более элементарной, но обычно содержательной и потому обычно сложной) вместо «немотивированной для него» математики (обычно менее элементарной, но обычно языковой и потому обычно тривиальной), имеет преимущество в дальнейшей учебе и научной работе.

Олимпиадных задач очень много, большинство из них интересны школьнику и среди них много математически содержательных. Такие задачи могут составить основу изучаемого материала. Однако решение олимпиадных задач без изучения математических идей и теорий недостаточно эффективно даже для «чистой» подготовки к олимпиадам (на долгих — год и более — промежутках времени, как и вообще решение

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, 2006(57–63)

сиюминутных задач без фундаментального развития). Кроме того, большинству людей легче достичь успеха на олимпиадах (как и в других видах творческой деятельности) в том случае, когда они не считают успех главной целью. Сложную задачу легче решить, если спокойно думать о самой задаче, а не о награде, которая последует за ее решением. Поэтому школьник, мотивированный более высокой целью, чем успех на олимпиаде, имеет на этой олимпиаде психологическое преимущество.

Как удачно подобрать задачи для обучения учеников? Этот вопрос учителя задавали себе последние десять тысяч лет [2, предисловие], [4], [5, с. 26–33], [7, предисловие]. Расскажу и я о части своего практического опыта, находящегося в русле опыта приведенных авторитетов.

В Московском центре непрерывного математического образования (МЦНМО) под руководством автора этой заметки проходит кружок «Олимпиады и Математика». Моими ассистентами в разное время были и являются А. Акопян, А. Засорин, Д. Пермяков, С. Спиридонов и И. Шнурников. Это студенты механико-математического факультета Московского государственного университета, в прошлом победители Международных и Всероссийских олимпиад школьников. Большинство из них отличники, некоторые из них уже являются авторами научных работ. Аналогичный кружок «Математический Семинар» я веду в физико-математической школе-интернате им. А. Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ) с 1994 года (до 2001 года совместно с В. Н. Дубровским).

Участвовать в кружке «Олимпиады и Математика» имеет право любой желающий. Однако уровень занятий довольно высок; большинство участников нашего кружка — ученики 8–11 классов, которые имеют шанс пройти на Всероссийскую олимпиаду.

Активное участие в кружке требует затрат времени и сил, поэтому его желательно согласовать с родителями и учителями. На занятиях кружка школьники учатся решать интересные задачи, подобранные так, что в процессе их решения и обсуждения ученики знакомятся с важными математическими идеями и теориями. В начале каждой темы решаются и разбираются в основном задачи, предлагавшиеся ранее на олимпиадах (или аналогичные таковым). А в конце дело часто доходит до *задач для исследования*. Мы уделяем много времени *индивидуальным* занятиям, разбирая лично с каждым школьником его решения и давая ему подсказки и/или дополнительные задачи, а также занимаемся со школьниками, которые решают исследовательские задачи (и выступают со своими результатами на конференциях школьников). Более подробно о задачах для исследования см., например, [6]. Занятия кружка объединяются в циклы из 1–3 занятий, связанных общей темой или идеей. Разные циклы почти независимы друг от друга, а их аннотации объявляются заранее (поэтому можно изучать только те циклы, которые школьнику наиболее интересны). Некоторые материалы кружка опубликованы в журналах «Квант», «Математическое просвещение», «Математическое образование» и “Quantum”. В хорошую погоду занятия кружка часто проводятся с выездом на природу.

Важной составляющей кружка являются выездные школы. Занятия на этих школах ведут замечательные математики и учителя, там превосходно организован быт и досуг школьников. Приглашаются туда наиболее активные участники кружка, а также те победители Московской и Всероссийской олимпиад, которые живут в Москве или ближнем Подмосковье и не занимаются в кружке.

Подчеркну, что успешное участие в кружке не учитывается при формировании команды Москвы на Всероссийскую Олимпиаду. Но, конечно, оно поможет успешно выступить на любой олимпиаде.

Приведу пример двух циклов задач из разбиравшихся на кружке. Первый цикл подводит школьника к открытию леммы Бернсайда. Заметим, что в существующих учебниках (в том числе для школьников) изучение приложений леммы Бернсайда начинается с немотивированных понятий и теории. Каждая следующая серия выдавалась школьникам после разбора предыдущей. Второй цикл подводит школьника к понятию цепной дроби на примере алгоритма вычисления количества целых точек «под прямой $y = \alpha x$». Другие циклы можно найти в интернете на странице `www.mccme.ru/circles/oim`. (Многие материалы на этой странице не претендуют на оригинальность. Не все материалы там составлены мной; имена других составителей указываются.

Благодарю за замечания и обсуждения, способствовавшие улучшению настоящей заметки, М. Н. Вялого, В. Н. Добровольскую и ее научного руководителя А. А. Русакова, а также всех участников кружка «Олимпиады и Математика».

Комбинаторика классов эквивалентности

1-я серия.

1. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в красный и серый цвета? Раскраски, совмещающиеся в (трехмерном) пространстве, считаются одинаковыми.

2. Найдите число раскрасок карусели из n вагончиков в a цветов (т. е. количество раскрасок вершин правильного n-угольника в a цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы) для
(a) $n = 5$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$.

3. Найдите количество закрасок в a цветов

(a) правильного треугольника, разбитого средними линиями на 4 равных треугольника.

(b) то же для 9 треугольников.

(c) квадрата, разбитого средними линиями на 4 равных квадрата.

(d) то же для 9 равных квадратов.

4.* Найдите число замкнутых ориентированных связных ломаных с вершинами в вершинах данного правильного p-угольника (где p — простое). Ломаные, совмещающиеся поворотом, неотличимы.

2-я серия.

Аналогично придуманному вами способу можно решить задачу 2 для произвольного n, однако решение будет громоздким. Приведем более простой (для «очень непростых» n) способ на примере решения задачи 2c.

Обозначим через X искомое число раскрасок. Назовем *занумерованной раскраской* раскраску карусели из шести *занумерованных* вагончиков. Тогда всего есть a^6 занумерованных раскрасок. Для занумерованной раскраски α обозначим через $[\alpha]$ соответствующую незанумерованную раскраску.

Посчитаем двумя способами число P пар (α, n), в которых $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и α — занумерованная раскраска, переходящая в себя при повороте на $2\pi n/6$. Пусть $\operatorname{stab}\alpha$ — число тех $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, для которых поворот на $2\pi n/6$ переводит занумерованную раскраску α в себя. Тогда

$$P = \sum_{\alpha} \operatorname{stab}\alpha = \sum_{\text{раскраскам } \beta} \sum_{\{\alpha:[\alpha]=\beta\}} \operatorname{stab}[\alpha] = \sum_{\text{раскраскам } \beta} \operatorname{stab}\beta \frac{6}{\operatorname{stab}\beta} = 6X.$$

Предпоследнее равенство выполнено, поскольку

- для занумерованных раскрасок α_1 и α_2, переводящихся друг в друга поворотами, $\operatorname{stab}\alpha_1 = \operatorname{stab}\alpha_2$ (эти равные числа обозначаются $\operatorname{stab}[\alpha_1]$), и

- количество занумерованных раскрасок, получающихся поворотами из данной занумерованной раскраски α, равно $\dfrac{6}{\operatorname{stab}\alpha}$.

5. Докажите последнее утверждение.

С другой стороны, поворот на $2\pi n/6$ переводит в себя ровно $a^{(n,6)}$ закрепленных раскрасок, поэтому $P = \sum\limits_{n=0}^{5} a^{(n,6)}$. Итак,

$$X = \frac{1}{6}(a^6 + 2a + 2a^2 + a^3).$$

6. Найдите число

(a) раскрасок карусели из n вагончиков в a цветов.

(b) a-цветных ожерелий из n бус.

7. Сколькими способами можно раскрасить в a цветов грани (a) правильного тетраэдра; (b) куба? Раскраски, совмещающиеся вращением (трехмерного) пространства, считаются одинаковыми.

8. Сколько существует различных (т. е. неизоморфных) (не)ориентированных графов с 4 вершинами? А с 5?

9.* Отображения $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (т. е. функции алгебры логики от n переменных) называются *конгруэнтными*, если они становятся равными после переименования переменных.

(a) Найдите число b_n функций алгебры логики от n переменных с точностью до конгруэнтности.

(b) Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} n!\, b_n/2^{2^n}$ и найдите этот предел.

10. Сформулируйте общую теорему, которую можно было бы применять вместо повторения приведенного решения задачи 2c.

3-я серия. Вот ответ.

Лемма Бернсайда. *Пусть заданы конечное множество M и семейство $\{g_1 = \mathrm{id}\, M,\ g_2, \ldots, g_n\}$ преобразований этого множества, замкнутое относительно композиции и взятия обратного элемента. Назовем элементы множества M* эквивалентными, *если один можно перевести в другой одним из данных преобразований. Тогда число классов эквивалентности равно $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{fix}(g_i)$, где $\mathrm{fix}(g_i)$ — число элементов множества M, которые преобразование g_i переводит в себя.*

(Чтобы сделать этот и следующие результаты менее доступными, их обычно формулируют и доказывают на языке теории абстрактных групп.)

Назовем *(конечной) группой* конечное семейство преобразований (т. е. перестановок) некоторого множества, замкнутое относительно композиции и взятия обратного элемента. Дальнейшие задачи особенно интересны тем, кто уже решал задачи про перестановки.

11. (a) Любая группа содержит тождественное преобразование.

(b) Если число n преобразований в группе G простое, то для любого нетождественного преобразования $g \in G$ имеем $G = \{g, g^2, \ldots, g^n = \mathrm{id}\}$.

Если в группе G найдется преобразование g, для которого $G = \{g, g^2, \ldots, g^n = \mathrm{id}\}$, то группа G называется *циклической*. Группа G называется *бициклической* (этот термин не общепринят), если для некоторых целых

$p > 1$ и $q > 1$ и преобразований $g, h \in G$ выполнено $gh = hg$, $g^p = \mathrm{id}$, $h^q = \mathrm{id}$ и $G = \{g^k h^l \mid 1 \leqslant k \leqslant p, 1 \leqslant l \leqslant q\}$.

12. Приведите пример бициклической группы из 4 элементов.

13. Любая ли группа из n преобразований является циклической или бициклической для (a) $n = 4$; (b) $n = 6$; (c) $n = 8$; (d)* $n = 9$; (e) $n = 10$; (f)* $n = 15$?

14.* *Теорема Лагранжа.* Если H — подгруппа группы G (т. е. подмножество группы G, также являющееся группой), то $\#G$ делится на $\#H$.

15.* *Теоремы Силова.* Пусть p — простое, n делится на p^k и не делится на p^{k+1}, а G — группа из n элементов. Докажите, что

(a) В G имеется подгруппа из p^k элементов.

(b) Число таких подгрупп сравнимо с 1 по модулю p.

(c) Для любых двух таких подгрупп H и H' найдется такое преобразование $g \in G$, что $H' = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

(d) Если p и q — простые, $p < q$ и $q - 1$ не делится на p, то любая группа из pq преобразований является циклической или бициклической.

Целые точки под прямой

Эти задачи подводят школьника к алгоритму вычисления суммы $f_\alpha(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} [\alpha k]$, т. е. количества целых точек «под прямой $y = \alpha x$». Через $[x]$ и $\{x\}$ обозначаются целая и дробная части числа x, соответственно. Латинские буквы обозначают целые числа. Алгоритм строится в задачах 2abc, задача 1 полезна «для разогрева».

1. Найдите $f_\alpha(n)$ для (a) целого α; (b) целого 2α; (c) целого 3α; (d) $\alpha = a/n$ для данных целых a и n; (e) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_\alpha(n)}{n^2}$.

2. Докажите, что

(a) $$f_\alpha(n) = f_{\{\alpha\}}(n) + \frac{1}{2}[\alpha]n(n+1).$$

(b) $$f_\alpha(n) + f_{\frac{1}{\alpha}}([n\alpha]) - [\frac{n}{q}] = n[n\alpha],$$

где q — знаменатель несократимой дроби, представляющей число α, если α рационально, и $q = \infty$ (т. е. $[\frac{n}{q}] = 0$), если α иррационально.

Указание: посчитайте количество целых точек в прямоугольнике $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant [n\alpha]$.

(c) Найдите алгоритм вычисления суммы $f_\alpha(n)$. Указание:

$$f_{2/3}(n) = n[\frac{2n}{3}] + [\frac{n}{3}] - f_{3/2}([\frac{2n}{3}]);$$

$$f_{3/2}([\frac{2n}{3}]) = \frac{1}{2}[\frac{2n}{3}]([\frac{2n}{3}]+1) + f_{1/2}([\frac{2n}{3}]);$$
$$f_{1/2}([\frac{2n}{3}]) = [\frac{2n}{3}][\frac{n}{3}] + [\frac{n}{3}] - f_2([\frac{n}{3}]),$$

поскольку $[[x]/n] = [x/n]$ для целого $n > 0$ и, значит, $[\frac{[\frac{2n}{3}]}{2}] = [\frac{n}{3}]$;

$$f_2([\frac{n}{3}]) = [\frac{n}{3}]([\frac{n}{3}]+1).$$

(d) Найдите алгоритм вычисления суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\{\alpha k\}$.

Замечания. Частный случай равенства 2b (на котором основан предлагаемый алгоритм) для положительных нечетных взаимно простых чисел $p < q$, $\alpha = p/q$ и $n = (q-1)/2$ (тогда $[n\alpha] = (p-1)/2$) появляется при доказательстве закона взаимности квадратичных вычетов [1, вопрос 1б к главе II и V.2.l]; доказательство общего случая аналогично. Сумма из 2d вычислена (более громоздким способом, чем предложенный здесь) в [3].

Список литературы

[1] Виноградов И. М. *Основы теории чисел.* М.: Наука, 1972.

[2] Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. *Ленинградские математические кружки.* Киров, 1994.

[3] Добровольская В. Н. *Неполные суммы дробных долей* // Чебышевский сборник, 2004. Т. 5, №2(10). С. 42–48.

[4] Судзуки Д. *Основы дзэн-буддизма. Наука Дзэн — ум дзэн.* Киев, 1992.

[5] Платон. *Федон*, в кн. Федон, Пир, Федр, Парменид. М.: Мысль, 1999.

[6] Скопенков А. *Исследовательские задачи для школьников* // «Тезисы докладов конференции, посвященной 100-летию С. М. Никольского». М.: МИ РАН, 2005.
Электронный вариант: `www.mccme.ru/circles/oim/100.ps`

[7] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.* М.: Физматлит, 2001.

А. Б. Скопенков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет; Независимый московский университет; Московский институт открытого образования.
E-mail: `skopenko@mccme.ru`