О сумме углов многогранника

И. В. Изместьев*

Преподнося сюрприз
Суммой своих углов,
Вещь выпадает из
Нашего мира слов.

Иосиф Бродский,
Натюрморт VII

1. Введение

В этой статье мы докажем ряд соотношений, связывающих величины внутренних углов многогранника. Самое известное из них (к сожалению, менее известное, чем оно того заслуживает) — формула Грама. Для трехмерного многогранника она гласит:

Теорема 1.
$$2\sum_e \alpha_e - \sum_v \alpha_v = 2\pi(F-2), \tag{1}$$
где α_e — двугранный угол при ребре e, α_v — телесный угол при вершине v, F — количество граней многогранника, суммирование ведется по всем вершинам и ребрам.

Например, куб имеет 12 ребер с углами по $\pi/2$, 8 вершин с углами также по $\pi/2$ и 6 граней. Подстановка этих величин в формулу (1) дает верное тождество.

Формула Грама обобщается на многогранники более высокой размерности. Для этого нам надо определить величину угла при каждой грани многогранника. Можно поступить традиционно: если плоский (и вместе с ним двугранный) угол измеряется длиной дуги, а телесный площадью области, высекаемой на единичной сфере, то полный k-мерный угол следует положить равным площади единичной k-мерной сферы. Однако иногда удобно углы нормировать, приняв величину полного угла за единицу. В нашем случае это приводит к элегантному равенству.

*Работа выполнена в рамках проекта «Полиэдральные поверхности», финансируемого DFG (Германским исследовательским обществом).

Теорема 2 (Формула Грама).

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k = 0, \tag{2}$$

где φ_k — сумма (нормированных) величин углов при k-мерных гранях данного n-мерного многогранника.

Дадим более строгое определение величины угла. Пусть P — n-мерный многогранник, Q — его k-мерная грань. Выберем точку x внутри Q и рассмотрим шар B малого радиуса с центром в x. Величина угла многогранника P при грани Q полагается равной доле объема шара B, находящейся внутри многогранника P:

$$\varphi_Q(P) = \frac{\mathrm{vol}(B\cap P)}{\mathrm{vol}(B)}\,.$$

Эквивалентным образом можно рассмотреть малую сферу с центром в x и определить, какая доля ее площади находится внутри P.

Данное определение проясняет смысл слагаемых φ_{n-1} и φ_n в формуле (2). Следуя ему, для всех углов при $(n-1)$-мерных гранях мы получаем величину $1/2$. Кроме того, мы условливаемся считать сам многогранник своей (единственной) n-мерной гранью, откуда по определению находим $\varphi_n = 1$. Теперь читатель без труда может установить, что формула (1) является частным случаем формулы (2).

Кроме формулы Грама, мы докажем и другие соотношения между величинами углов многогранника, формулы Дена – Соммервиля. Они появляются в размерностях начиная с 4, и мы отложим их формулировку до более удобного момента.

* * * * * *

Для полноты изложения дадим определения многогранника и его граней. Ниже приведены также некоторые соглашения, используемые в дальнейшем.

Определение 1. *Выпуклым многогранником* в $\mathbb{R}^n$ называется ограниченное пересечение конечного числа полупространств. Многогранник называется *n-мерным*, если он не содержится в подпространстве $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ меньшей размерности.

Все многогранники в статье будут предполагаться выпуклыми. Как правило, мы также предполагаем, что размерность многогранника совпадает с размерностью объемлющего пространства. Это важно, например, при определении величины угла при грани.

Определение 2. *Опорной плоскостью* многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ называется гиперплоскость (подпространство размерности $n-1$), имеющая непустое пересечение с P и такая, что P лежит по одну сторону от нее. *Гранью* многогранника P называется пересечение P с любой его опорной плоскостью. Иногда к граням относят также сам многогранник P и/или пустое множество.

Каждая грань многогранника сама является многогранником и имеет определенную размерность. (Размерность пустого множества удобно положить равной -1.) Грани размерности 0 — это вершины. Грани размерности $n-1$ в n-мерном многограннике называются его фасетами. Многогранник может быть представлен как пересечение полупространств, граничные гиперплоскости которых задаются фасетами многогранника. Также многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин. «Самый маленький» n-мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$ — это симплекс, имеющий $n+1$ фасету и $n+1$ вершину. Если мы рассмотрим выпуклую оболочку конечного числа точек в общем положении, то все грани полученного многогранника, за исключением, быть может, его самого, будут симплексами (пример: октаэдр, с пошевеленными вершинами, если мы настаиваем на общем положении). Такой многогранник называется симплициальным. О симплициальных многогранниках пойдет речь в конце этой статьи.

Мы будем использовать без доказательства формулу Эйлера для n-мерного многогранника. Если мы обозначим через f_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ количество k-мерных граней данного n-мерного многогранника P, то эта формула гласит:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k = 1. \tag{3}$$

Поскольку $f_n = 1$ (многогранник является своей единственной n-мерной гранью), эту формулу часто записывают в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k = 1 + (-1)^{n-1}.$$

В одном из доказательств (доказательство Шепарда в параграфе 3) мы применим формулу Эйлера в более общей ситуации, когда рассматривается разбиение многогранника на более мелкие многогранники, и f_k обозначает количество k-мерных частей разбиения.

Более близко с восхитительным и до сих пор загадочным миром многогранников читатель может познакомиться по книге [8].

2. Формула Грама для трехмерного многогранника

В этом параграфе мы докажем теорему 1. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение:

Лемма 1. *Для сферического треугольника Δ на сфере единичного радиуса выполняется равенство*

$$S(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \tag{4}$$

где $S(\Delta)$ — площадь треугольника, а α, β и γ — величины его углов.

Доказательство. По определению, сферический треугольник ограничен дугами больших окружностей. Иначе говоря, Δ является пересечением трех полусфер таких, что их граничные окружности не пересекаются в одной точке. Пусть H_1, H_2, H_3 — эти полусферы. Тогда имеем

$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \Delta,$$
$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \mathbb{S}^2 \setminus \Delta'.$$

Здесь $\mathbb{S}^2$ — сфера, Δ' — треугольник, центрально-симметричный треугольнику Δ относительно центра сферы (рис. 1). Рассматривая части, на которые делят сферу границы областей H_1, H_2 и H_3, нетрудно доказать равенство

$$\begin{aligned} S(H_1 \cup H_2 \cup H_3) &= S(H_1) + S(H_2) + S(H_3) - S(H_1 \cap H_2) - \\ &\quad - S(H_2 \cap H_3) - S(H_3 \cap H_1) + S(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \end{aligned}$$

(формула включения-исключения). Однако $S(H_i) = 2\pi$ для $i = 1, 2, 3$, а $S(H_i \cap H_j)$ равняется удвоенному углу треугольника Δ при вершине,

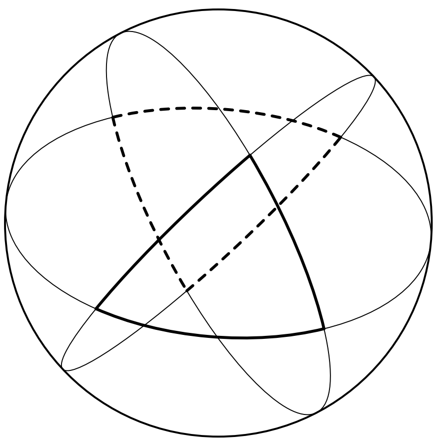

Рис. 1. *Сферический треугольник и его антипод*

лежащей на границе полусфер H_i и H_j. Подставляя эти и полученные выше равенства, получаем

$$4\pi - S(\Delta') = 3 \cdot 2\pi - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma + S(\Delta).$$

Поскольку $S(\Delta') = S(\Delta)$, отсюда вытекает равенство (4). □

Задача 1. Докажите, что площадь выпуклого сферического n-угольника M на единичной сфере вычисляется по формуле

$$S(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi,$$

где α_i, $i = 1, \ldots, n$ — величины углов многоугольника. (*Подсказка:* Разрежьте многоугольник на треугольники.)

Доказательство теоремы 1. Для каждой вершины v многогранника возьмем сферу малого радиуса с центром в точке v. Пересечение этой сферы с многогранником является сферическим многоугольником. Увеличим сферу так, чтобы ее радиус стал равным единице и обозначим полученный сферический многоугольник через M_v. По задаче 1 имеем

$$S(M_v) = \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_i(v) - (n_v - 2)\pi,$$

где n_v — количество сторон многоугольника M_v, а $\alpha_i(v)$ — величины его углов. При этом $\alpha_i(v)$ равны, как нетрудно видеть, величинам двугранных углов при ребрах, исходящих из вершины v, а $S(M_v)$ равняется по определению величине α_v телесного угла при v. Просуммировав все полученные равенства, получаем:

$$\sum_v \alpha_v = \sum_v \sum_{e \ni v} \alpha_e - \pi \sum_v (n_v - 2).$$

Поскольку каждое ребро e содержит две вершины, двугранный угол α_e появляется в правой части равенства ровно два раза. Точно так же имеем $\sum_v n_v = 2E$, где E — число ребер многогранника. Таким образом, равенство переписывается в виде

$$\sum_v \alpha_v = 2 \sum_e \alpha_e - 2\pi(E - V),$$

где V обозначает число вершин многогранника. Принимая во внимание формулу Эйлера $V - E + F = 2$, мы приходим к равенству (1). □

Доказательство леммы 1 может быть обобщено на более высокие размерности, как это предлагается сделать читателю в следующей задаче.

Задача 2. Пусть $\mathbb{S}^n$ — единичная сфера размерности n (множество точек на расстоянии 1 от данной точки в $(n+1)$-мерном пространстве).

Сферическим симплексом называется пересечение $(n+1)$-й полусферы такое, что ни одна точка сферы не является их общей граничной точкой. Пусть Δ — симплекс на $\mathbb{S}^n$. Докажите равенство

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k = (1+(-1)^n)\frac{\mathrm{vol}(\Delta)}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)}\,. \tag{5}$$

Здесь vol обозначает объем[1)], φ_k — сумма нормированных величин углов при k-мерных гранях симплекса Δ. Углы при гранях сферического многогранника измеряются аналогично углам евклидова многогранника, смотри введение.

Формула (5) называется формулой Грама для сферического симплекса. Заметьте, что в нечетных размерностях правая часть в ней равна 0. Таким образом, данная формула не позволяет выразить объем трехмерного сферического симплекса через величины его углов.

Попытка обобщить данное выше доказательство формулы Грама на высшие размерности наталкивается на серьезные трудности (осознайте, какие!). Поэтому мы должны пойти другим путем.

3. Два доказательства формулы Грама в высших размерностях

Доказательство Соммервиля

Первое доказательство формулы (2) для выпуклого n-мерного многогранника P при произвольном n было предложено Соммервилем в [6]. Оно состоит из двух этапов.

Лемма 2. *Формула Грама верна для симплекса.*

Доказательство. Заметим, что формула Грама для сферического симплекса (5) верна на сфере произвольного радиуса: при гомотетии величины углов симплекса не меняются, отношение объема симплекса к объему сферы также остается неизменным. Идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть данный евклидов симплекс как сферический на сфере бесконечного радиуса. Объем такой сферы бесконечен, поэтому правая часть равенства (5) обращается в 0.

Более строго: поместим n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ вместе с лежащим в нем евклидовым симплексом $\Delta_{\mathbb{R}}$ в $(n+1)$-мерное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим сферу радиуса R в $\mathbb{R}^{n+1}$, касающуюся $\mathbb{R}^n$ вблизи симплекса, скажем, в одной из его точек. Спроецируем симплекс на сферу при

[1)] Для подмножества сферы $\mathbb{S}^n$ мы говорим о его объеме, а не о площади, поскольку все рассматриваемые здесь множества, и прежде всего симплекс Δ, содержатся в $\mathbb{S}^n$; пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ играет вспомогательную роль.

помощи проекции из ее центра. Гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ перейдут при проекции в большие гиперсферы (точнее, в их половины), поэтому образом $\Delta_{\mathbb{R}}$ будет сферический симплекс, который мы обозначим $\Delta_{\mathbb{S}}$. Теперь будем увеличивать радиус сферы, следя при этом, чтобы она по-прежнему касалась пространства $\mathbb{R}^n$ в одной из точек симплекса. Ясно, что при этом величины углов симплекса $\Delta_{\mathbb{S}}$ стремятся к величинам соответствующих углов симплекса $\Delta_{\mathbb{R}}$, объем $\Delta_{\mathbb{S}}$ стремится к объему $\Delta_{\mathbb{R}}$, а объем сферы стремится к бесконечности. Поэтому в пределе формула (5) переходит в формулу (2). □

Второй этап доказательства состоит в разбиении многогранника P на симплексы и выводе формулы Грама для целого P из формул для его частей. То специальное подразделение, которое мы будем рассматривать, получается путем последовательного разбиения граней многогранника.

Пусть Q — грань многогранника P. Выберем внутри Q произвольную точку c_Q и построим пирамиды с вершиной c_Q над всеми гранями, содержащимися в Q. Эта операция называется *звездным разбиением* многогранника P в грани Q. Гранями получающегося подразделения называются все грани многогранника P, отличные от Q (и, таким образом, не затронутые разбиением), а также все получившиеся пирамиды и грани этих пирамид.

Будем осуществлять звездные разбиения в гранях многогранника P в порядке возрастания размерности: сначала подразделим по очереди все ребра, затем все двумерные грани, и т. д. В конце произведем разбиение в самом P, выбрав точку c_P в его внутренности. Рисунок 2 иллюстрирует получающиеся разбиения в трехмерном случае (здесь сначала разбиты одновременно все ребра, затем все грани, последний шаг с точкой c_P опущен). После каждого шага мы получаем новое, более мелкое подразделение P. Звездное разбиение в грани текущего подразделения определяется

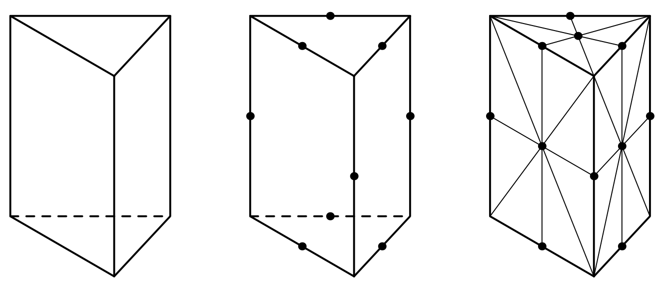

Рис. 2. *Барицентрическое подразделение как результат последовательных звездных разбиений*

так же, как и выше в случае многогранника. Нормированная величина угла при грани подразделения определяется тоже аналогично величине угла при грани многогранника.

Покажем, что альтернированная сумма величин углов при гранях не меняется при звездном разбиении. Пусть φ_k — сумма величин углов при k-мерных гранях подразделения, полученного в результате нескольких первых шагов, φ'_k — аналогичная сумма после звездного разбиения в очередной грани Q. Обозначим через $f_k(Q)$ количество k-мерных граней текущего подразделения, содержащихся в грани Q, и через α — угол многогранника P при грани Q. Тогда имеют место равенства:

$$\begin{array}{lll} \varphi'_l = \varphi_l & \text{при } l > k, & \varphi'_k = \varphi_k + \alpha(f_{k-1}(Q) - 1), \\ \varphi'_l = \varphi_l + \alpha f_{l-1}(Q) & \text{при } k > l > 0, & \varphi'_0 = \varphi_0 + \alpha. \end{array}$$

Суммируя с чередующимися знаками, получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi'_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k + \\ + \alpha(1 - f_0(Q) + \dots + (-1)^{k-1}f_{k-2}(Q) + (-1)^k(f_{k-1}(Q) - 1)).$$

Так как $f_0(Q) = 1$, из формулы Эйлера для многогранника Q следует, что коэффициент при α равен 0. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi'_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k\,.$$

Теперь подсчитаем сумму $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k$ после последнего разбиения. Нетрудно доказать индукцией по размерности n многогранника P, что n-мерные грани получившегося подразделения — симплексы с наборами вершин $(c_{Q^0}, c_{Q^1}, \dots, c_{Q^n})$, где Q^k — одна из k-мерных граней многогранника P и $Q^k \subset Q^{k+1}$ (такое подразделение называется барицентрическим, если в качестве точки c_Q выбирается центр масс грани Q). Каждая грань подразделения является гранью одного или нескольких из таких симплексов. Кроме того, ясно, что угол при каждой грани равен сумме углов при ней всех симплексов, которым она принадлежит. Поэтому имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k = \sum_{\Delta}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k^{\Delta}\,,$$

где суммирование ведется по всем n-мерным симплексам подразделения, а φ_k^{Δ} обозначает сумму углов при k-мерных гранях симплекса Δ. Поскольку каждая из внутренних сумм равна 0 по ранее доказанному, имеем $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k = 0$ для получившегося подразделения, а значит и для многогранника P. Формула Грама доказана.

* * * * * *

Через 40 лет после публикации доказательство Соммервиля было несправедливо сочтено ошибочным. Вероятно, причиной послужило то, что Соммервиль употреблял термин «многогранник» для подразделений, возникающих в процессе доказательства, и это не удовлетворяло повысившимся стандартам строгости. В результате появились новые доказательства формулы Грама. Одно из них, опубликованное Шепардом в [7] отличается особой элегантностью, и мы его здесь приведем.[2)]

Доказательство Шепарда

Вернемся к определению величины угла $\varphi_Q(P)$ многогранника P при грани Q. Грани Q можно сопоставить конус L_Q, ограниченный гиперплоскостями фасет, содержащих Q. Конус L_P — это все пространство $\mathbb{R}^n$, конус фасеты — полупространство. Если c_Q — произвольная точка внутри грани Q, то мы имеем

$$\varphi_Q(P) = \frac{\mathrm{vol}(B \cap L_Q)}{\mathrm{vol}(B)},$$

где B — шар произвольного радиуса с центром в c_Q. Выбрав по точке c_Q в каждой грани Q, перенесем каждый конус L_Q так, чтобы точка c_Q попала в начало координат. Тогда формула Грама равносильна равенству

$$\sum_Q (-1)^{\dim Q} \,\mathrm{vol}(B \cap (L_Q - c_Q)) = 0, \tag{6}$$

где B на этот раз обозначает шар с центром в начале координат. Для доказательства последнего равенства достаточно показать, что для (почти) любого луча, исходящего из начала координат, сумма ± 1, соответствующих тем конусам, внутри которых содержится этот луч, равна 0. Иными словами, покрытие шара B конусами $L_Q - c_Q$, взятыми с соответствующими знаками, имеет в почти любой точке кратность 0.

Рассмотрим луч x, не параллельный ни одной из фасет многогранника P. Точки шара B, не лежащие на таких лучах, образуют множество нулевого объема, поэтому достаточно рассмотреть лучи, удовлетворяющие этому условию. Спроецируем многогранник P в направлении x на плоскость, ортогональную x. Обозначим проекцию через P^x. Нетрудно видеть, что луч x содержится в конусе $L_Q - c_Q$ в том и только в том случае, если $Q = P$ или если грань Q «освещена» лучами, параллельными x (грани, проекции которых лежат на границе P^x, освещенными не считаются). Рисунок 3 иллюстрирует ситуацию в трехмерном случае.

[2)] Доказательство Шепарда содержится также в переводе на английский язык книги В. В. Прасолова и В. М. Тихомирова «Геометрия» [5]. Готовится ее русское переиздание.

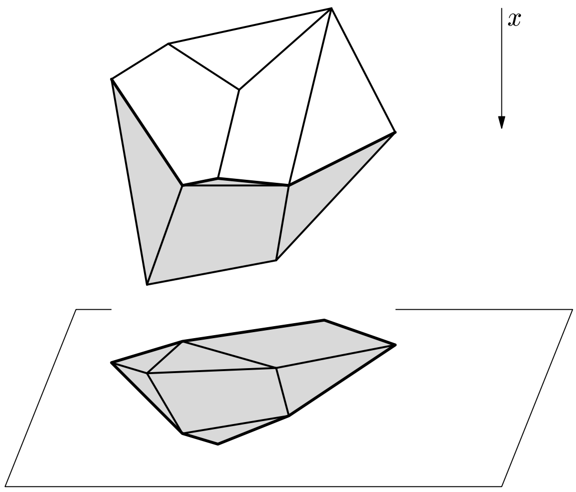

Рис. 3. *Свет и тень. Ребра, по которым свет «скользит», считаются затененными*

Обозначим через f_k^x количество освещенных k-мерных граней, положив $f_n^x = 1$. Требуется доказать равенство $\sum_{k=0}^n (-1)^k f_k^x = 0$.

Для этого рассмотрим затененные грани. В размерности k их количество равно $f_k - f_k^x$. В то же время их проекции образуют разбиение $(n-1)$-мерного многогранника P^x. Поэтому по формуле Эйлера имеем

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (f_k - f_k^x) = 1.$$

Вычитая это равенство из формулы Эйлера $\sum_{k=0}^n (-1)^k f_k = 1$ для многогранника P, приходим к требуемому утверждению. Таким образом, равенство (6) доказано, а вместе с ним и формула Грама.

4. Соотношения Дена – Соммервиля

Вернемся к сферическому симплексу размерности n:

$$\Delta = \cap_{i=0}^n H_i, \tag{7}$$

где $H_0, H_1, \ldots, H_n$ — полусферы n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$. Формула Грама (5) для сферического симплекса является следствием равенства объемов симплекса Δ и симметричного ему симплекса Δ' (см. доказательство леммы 1). Однако границы полусфер H_i делят сферу на множество других областей. При этом нетрудно заметить, что суммарный объем частей, k-кратно покрываемых полусферами H_i, равен суммарному объему частей, покрытых $n+1-k$ раз. Эти равенства приводят к целому набору новых соотношений между углами симплекса, называемых (метрическими) соотношениями Дена – Соммервиля. Кроме того, соотношения Дена – Соммервиля распространяются на величины углов симплициального многогранника. Но наибольшую известность они получили как соотношения между количеством граней данной размерности многогранника такого вида. Обо всем этом и пойдет речь в данном параграфе.

Обозначим через S_i граничную сферу полусферы H_i. Грани симплекса (7) допускают следующее описание. Пусть I — подмножество множества индексов $\{0, 1, \ldots, n\}$, не совпадающее со всем множеством. Положим

$$F_I = (\cap_{i \in I} S_i) \cap \Delta.$$

Тогда F_I — грань симплекса Δ, имеющая размерность $n - |I|$. Грани F_I мы сопоставим ее *лунку*

$$H_I = \cap_{i \in I} H_i$$

(сравните с определением конуса грани евклидова многогранника в предыдущем параграфе). Нетрудно доказать, что отношение объема лунки к объему сферы есть величина угла при соответствующей грани. Таким образом, имеем

$$\varphi_l = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)} \sum_{|I|=n-l} \mathrm{vol}(H_I).$$

Рассмотрим теперь области, на которые разбивают сферу $\mathbb{S}^n$ ее подсферы S_i. Каждому множеству $J \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ отвечает область

$$G_J = (\cap_{j \in J} H_j) \cap (\cap_{j \notin J} \overline{H_j}),$$

где $\overline{H_j}$ обозначает полусферу, противоположную H_j. Ясно, что симметрия относительно центра сферы переводит область G_J в область $G_{\{0,1,\ldots,n\} \setminus J}$. Поэтому для величин

$$\psi_k = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)} \sum_{|J|=k} \mathrm{vol}(G_J)$$

(доля объема сферы, покрытого полусферами H_i ровно k раз) имеют место равенства

$$\psi_k = \psi_{n+1-k}\,.$$

Если мы сможем выразить величины $\{\psi_k\}$ через набор величин $\{\varphi_l\}$, то получатся соотношения между величинами углов симплекса Δ.

Включение $G_J \subset H_i$ имеет место тогда и только тогда, когда $i \in J$. Поэтому

$$G_J \subset H_I \;\Leftrightarrow\; J \supset I.$$

Следовательно, если $|J| = k$, то лунки H_I, отвечающие $(n-l)$-мерным граням, покрывают данную область G_J с кратностью $\binom{k}{l}$. Это наблюдение позволяет выразить суммарный объем $(n-l)$-лунок через объемы областей G_J следующим образом:

$$\varphi_{n-l} = \sum_{k=l}^{n+1} \binom{k}{l} \psi_k \,. \tag{8}$$

(Например, для $l = n$ имеем $\varphi_0 = \psi_n + (n+1)\psi_{n+1}$.)

Заметим, что $\psi_{n+1} = \mathrm{vol}(\Delta)/\,\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)$. Для удобства введем дополнительную величину

$$\varphi_{-1} = \frac{\mathrm{vol}(\Delta)}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)}\,.$$

Тогда равенство (8) выполняется при всех l от 0 до $n+1$ и мы получаем систему из $(n+2)$ уравнений относительно неизвестных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n+1}$. Ее можно решить путем последовательного исключения неизвестных, начиная с ψ_{n+1}. Однако есть прием, позволяющий решить систему быстрее и записать соотношения между углами в более запоминающейся форме.

Умножим каждое из равенств (8) на t^l и просуммируем по l от 0 до $n+1$. В результате получим равенство

$$\sum_{l=0}^{n+1} \varphi_{n-l} t^l = \sum_{k=0}^{n+1} \psi_k (t+1)^k.$$

Производя замену $t \to t-1$ и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях t, приходим к равенствам

$$\psi_k = \sum_{l=k}^{n+1} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} \varphi_{n-l} \quad \text{при } k = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{9}$$

Получающиеся отсюда при подстановке в равенства $\psi_k = \psi_{n+1-k}$ соотношения между углами сферического симплекса могут быть перенесены на евклидов случай. Достаточно точно так же, как мы это делали при доказательстве леммы 2, приблизить евклидов симплекс сферическим на сфере большого радиуса. В результате величина φ_{-1}, равная отношению объема симплекса к объему сферы, обнуляется.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3 (Соотношения Дена – Соммервиля для симплекса). *Пусть φ_k, $k = 0, \ldots, n$, — сумма величин углов при k-мерных гранях n-мерного симплекса Δ (сферического или евклидова). Введем также обозначение*

$$\varphi_{-1} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{vol}(\Delta)}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)} & \textit{в сферическом случае,} \\ 0 & \textit{в евклидовом случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим многочлен

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_{n-k} t^k$$

и положим $\varphi(t-1) = \sum_{k=0}^{n+1} \psi_k t^k = \psi(t)$. *Тогда имеет место равенство*

$$t^{n+1}\psi(t^{-1}) = \psi(t). \tag{10}$$

Или, в более явном виде,

$$\psi_k = \psi_{n+1-k} \quad \text{при } k = 0, 1, \ldots, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\,. \tag{11}$$

Наконец, в терминах величин φ_k:

$$\sum_{l=k}^{n+1} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} \varphi_{n-l} = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{n+1-l}{k-l} \varphi_{l-1}\,, \tag{12}$$

также при $k = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$.

Проанализируем, сколько новой информации содержится в соотношениях Дена – Соммервиля. Можно показать, что $\lfloor (n+2)/2 \rfloor$ равенств (12) линейно независимы.[3] Однако соотношение для $k = 0$ равносильно равенству $\psi_0 = \psi_{n+1}$ и тем самым формуле Грама. Кроме того, из формулы (8) при $l = 0, 1$ и соотношений (11) следует:

$$\varphi_{n-1} = \sum_{k=1}^{n+1} k\psi_k = \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \psi_k = \frac{n+1}{2} \varphi_n\,,$$

что вполне естественно, поскольку по определению $\varphi_n = 1$ и $\varphi_{n-1} = (n+1)/2$ (у симплекса $n+1$ фасета, и угол при каждой равен $1/2$). Таким образом, после эквивалентных преобразований из системы (12) можно исключить одно тривиальное равенство, а одно из равенств (формула Грама) было нам уже известно. Итого мы имеем $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ новых нетривиальных соотношений. В «осязаемых» случаях $n = 2$ и $n = 3$ мы, таким образом, не получаем ничего нового; в размерностях 4 и 5 имеется по одному новому линейному соотношению. Вместе с формулой Грама получаются следующие системы равенств:

$$\begin{cases} \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \dfrac{3}{2} = 2\varphi_{-1}\,, \\ \quad 2\varphi_1 - 3\varphi_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{при } n = 4,$$

$$\begin{cases} \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + 2 = 0, \\ \qquad \varphi_2 - 2\varphi_3 + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{при } n = 5.$$

[3] Для того, чтобы в этом убедиться, удобно перейти от переменных φ_l к переменным ψ_k.

Теорему (3) можно обобщить на случай симплициального многогранника. Напомним, что многогранник размерности n называется *симплициальным*, если все его грани, за исключением быть может его самого, являются симплексами.

Теорема 4 (Соотношения Дена – Соммервиля для симплициального многогранника). *Пусть P — n-мерный симплициальный многогранник (сферический или евклидов). Обозначим через f_k, $k = 0, 1, \dots, n$, количество его k-мерных граней, через φ_k сумму нормированных величин углов при k-мерных гранях. Кроме того, положим $f_{-1} = 1$ и*

$$\varphi_{-1} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{vol}(P)}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n)} & \text{в сферическом случае,} \\ 0 & \text{в евклидовом случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим многочлены

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_{n-k} t^k,$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k-1} t^k$$

и положим

$$\varphi(t-1) = \sum_{k=0}^{n+1} \psi_k t^k = \psi(t),$$

$$f(t-1) = \sum_{k=0}^{n} h_k t^k = h(t).$$

Тогда имеет место равенство

$$t^{n+1}(\psi(t^{-1}) + h(t^{-1}) - 1) = \psi(t) + h(t) - 1. \tag{13}$$

В более явном виде,

$$\begin{aligned} &\psi_k - \psi_{n+1-k} = h_{n+1-k} - h_k \quad \text{при } k = 1, \dots, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor, \\ &\psi_0 - \psi_{n+1} = h_{n+1} - h_0 + 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что обе части последнего равенства в (14) равны 0 по формулам Эйлера и Грама.

Доказательство. Выберем внутри многогранника точку c_P и разобьем P на n-мерные симплексы — пирамиды с вершиной c_P и фасетами многогранника в качестве оснований. Подсчитаем суммы величин углов всех симплексов при гранях данной размерности. Углы при вершинах многогранника составлены из углов при вершинах симплексов, при этом остаются еще углы симплексов при их общей вершине c_P. Вместе они составляют полный угол, поэтому имеем

$$\sum_{\Delta} \varphi_0(\Delta) = \varphi_0 + 1.$$

Вообще, для любого k от 0 до $n-1$ углы при k-мерных гранях многогранника составлены из углов при k-мерных гранях симплексов разбиения. Каждая из не учтенных при этом k-мерных граней симплексов натянута на вершину c_P и некоторую $(k-1)$-мерную грань многогранника. Соответствующие углы группируются в f_{k-1} полных углов. Таким образом, имеют место равенства

$$\sum_{\Delta} \varphi_k(\Delta) = \varphi_k + f_{k-1} \quad \text{при } k = 0, \dots, n-1.$$

Кроме того,

$$\sum_{\Delta} \varphi_n(\Delta) = f_{n-1}\,,$$

$$\sum_{\Delta} \varphi_{-1}(\Delta) = \varphi_{-1}\,.$$

Обозначая φ-многочлен для симплекса Δ через $\varphi^{\Delta}(t)$, приходим к равенству

$$\sum_{\Delta} \varphi^{\Delta}(t) = \varphi(t) + f(t) - 1.$$

Теорема 4 получается теперь применением теоремы 3 к каждому из симплексов Δ. □

Задача 3. Вычислите многочлен $h(t)$ для n-мерного симплекса.

Оказывается, коэффициенты многочлена h также обладают свойством симметрии, подобным равенствам $\psi_k = \psi_{n+1-k}$ для многочлена ψ. Эти соотношения более широко известны, чем соотношения между углами симплициального многогранника, и именно их имеют в виду, говоря о соотношениях Дена – Соммервиля.

Теорема 5 (Комбинаторные соотношения Дена – Соммервиля). *Пусть P — n-мерный симплициальный многогранник. Обозначим через f_k, $k = 0, 1, \dots, n$, количество его k-мерных граней и положим $f_{-1} = 1$. Рассмотрим многочлен*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k-1} t^k$$

и положим

$$f(t-1) = \sum_{k=0}^{n} h_k t^k = h(t).$$

Тогда имеет место равенство

$$t^n h(t^{-1}) = h(t). \tag{15}$$

В более явном виде,

$$h_k = h_{n-k}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 4. Поскольку нас интересуют только количества граней многогранника, мы можем среди многогранников данного комбинаторного типа выбрать такой, величины углов которого легко вычислить или оценить. В случае удачного выбора из соотношений теоремы 4 будут следовать нужные нам соотношения.

Пусть P — данный евклидов многогранник в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим n-мерную сферу, касающуюся пространства $\mathbb{R}^n$ во внутренней точке многогранника P, и спроецируем P на сферу из ее центра. Если радиус сферы r мал, то получающийся при проекции многогранник $P_{\mathbb{S}}$ занимает почти всю полусферу, обращенную к пространству $\mathbb{R}^n$. Кроме того, можно показать, что величины углов многогранника P при всех гранях размерностей от 0 до $n-1$ стремятся к 1/2 при стремлении радиуса сферы к 0. Таким образом,

$$\lim_{r\to 0} \varphi_k = \frac{1}{2} f_k \quad \text{при } k = 0, \dots, n-1.$$

Заметим также, что $\lim_{r\to 0} \varphi_{-1} = 1/2$ и $\varphi_n = 1$ независимо от величины радиуса. Отсюда получаем

$$\lim_{r\to 0}(\varphi(t) + f(t) - 1) = \frac{t}{2} f(t) + 1 + f(t) - 1 = \left(\frac{t}{2} + 1\right) f(t),$$

где сходимость понимается как сходимость последовательностей коэффициентов многочленов. Следовательно,

$$\lim_{r\to 0}(\psi(t) + h(t) - 1) = \frac{t+1}{2} h(t).$$

Тогда из равенства (13) следует

$$t^{n+1} \frac{t^{-1}+1}{2} h(t^{-1}) = \frac{t+1}{2} h(t),$$

откуда напрямую следует равенство (15). □

Комбинаторные соотношения Дена – Соммервиля были впервые доказаны Соммервилем в [6], но независимо от метрических соотношений теоремы 4. Необходимо упомянуть, что исследования Соммервиля были вдохновлены работой Дена [2]. Ден доказал теорему 3 для $n = 4$ и $n = 5$, указав также на возможность обобщения на случай произвольного n. Метрические соотношения Дена – Соммервиля доказаны также в статье [4] для «квазисимплициальных» многогранников — n-мерных многогранников, у которых все грани размерности меньшей либо равной $n-2$ являются симплексами.

5. Другие соотношения между углами

Кроме внутреннего угла при грани Q многогранника P, можно рассмотреть также и внешний угол. Для этого определим нормальный конус $N_Q(P)$ грани Q относительно P следующим образом:

$$N_Q(P) = \left\{ \sum a_i \boldsymbol{n}_i \mid a_i \geqslant 0 \right\},$$

где $\boldsymbol{n}_i$ — внешние нормали к фасетам, содержащим грань Q. Эквивалентное определение: возьмем точку x во внутренности грани Q и рассмотрим все точки пространства $\mathbb{R}^n$, для которых x — ближайшая точка многогранника P. Эти точки составляют множество $x+N_Q(P)$. Нетрудно видеть, что размерность конуса $N_Q(P)$ равна $\dim P - \dim Q$. В частности, нормальные конусы вершин имеют полную размерность. Из второго определения внешнего угла нетрудно увидеть, что нормальные конусы вершин покрывают все пространство, пересекаясь лишь по конусам меньшей размерности. Поэтому, если мы определим величину внешнего угла при грани Q стандартным образом:

$$\nu_Q(P) = \frac{\operatorname{vol}(B \cap N_Q)}{\operatorname{vol}(B)},$$

то получим равенство

$$\sum_v \nu_v(P) = 1, \tag{16}$$

где суммирование ведется по всем вершинам многогранника P. В случае трехмерного многогранника формула (16) является дискретным аналогом формулы Гаусса – Бонне для сферы.

Наконец, упомянем соотношения, вовлекающие внутренние и внешние углы одновременно. На этот раз пусть P — полиэдральный конус (пересечение конечного числа полупространств, проходящих через начало координат). Грани конуса P, а также величины внутренних и внешних углов при гранях определяются очевидным образом. Питер Макмаллен доказал в [3] равенства

$$\sum_Q \varphi_0(Q)\nu_Q(P) = 1,$$
$$\sum_Q (-1)^{\dim Q}\varphi_0(Q)\nu_Q(P) = 0,$$
$$\sum_Q (-1)^{\dim Q}\nu_0(Q)\varphi_Q(P) = 0,$$

где суммирование ведется каждый раз по всем граням конуса P, а начало координат рассматривается как грань каждого из конусов. Отметим, что на самом деле полиэдральный конус — это то же самое, что сферический многогранник (рассмотрим его пересечение со сферой S с центром в начале координат). При этом величинам внутренних углов $\varphi_0(Q)$ отвечают объемы граней $S \cap P$, а внешние углы остаются внешними углами. Если сложить первое и второе равенства Макмаллена, то получится соотношение, вовлекающее только грани четной размерности сферического многогранника. Это соотношение является дискретным аналогом формулы Гаусса – Бонне для высших размерностей.

Доказательства формулы Гаусса – Бонне и формулы Грама приведены в главе 7 книги [1]. Там рассматривается также случай многогранников в пространстве Лобачевского.

Автор признателен Э. Б. Винбергу, М. Н. Вялому и В. В. Прасолову за ценные замечания.

Список литературы

[1] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. *Геометрия пространств постоянной кривизны*. Итоги науки и техн. Совр. проблемы матем. Фунд. напр., т. 29. М.: ВИНИТИ, 1988.

[2] Dehn M. *Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der nichteuklidischen Geometrie* // Math. Ann., 1906. B. 61. S. 561–586.

[3] McMullen P. *Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1975. Vol. 78, no. 2. P. 247–261.

[4] Perles M. A., Shephard G. C. *Angle sums of convex polytopes* // Math. Scand., 1967. Vol. 21. P. 199–218.

[5] Prasolov V. V., Tikhomirov V. M. *Geometry*. Translations of Mathematical Monographs, 200. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[6] Sommerville D. M. Y. *The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimensions* // Proceedings Royal Soc. London, Ser. A, 1927. Vol. 115. P. 103–119.

[7] Shephard G. C. *An elementary proof of Gram's theorem for convex polytopes* // Can. J. Math., 1967. Vol. 19. P. 1214–1217.

[8] Ziegler G. M. *Lectures on polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. 152. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Изместьев Иван В.,
Institut für Mathematik MA 8-3,
Technische Universität Berlin,
Str. des 17. Juni 136
D-10623 Berlin
Germany
e-mail: `izmestie@math.tu-berlin.de`