Обобщенная теорема Ван дер Вардена

В. О. Бугаенко

Введение

В двадцатых годах прошлого века внимание математиков привлекла задача с элементарной формулировкой, решение которой длительное время найти не удавалось. Вот эта задача.

Пусть множество целых чисел раскрашено в конечное число цветов. Тогда найдется арифметическая прогрессия сколь угодно большой конечной длины, члены которой окрашены в один цвет.

После упорных усилий задачу удалось решить молодому голландскому математику Б. Л. Ван дер Вардену. Решение оказалось элементарным, но достаточно сложным. История этого доказательства приведена в книге А. Я. Хинчина [3], а в изложении самого Ван дер Вардена — в дополнении к книге Р. Грэхема [1]. В обеих этих книгах можно также найти доказательство теоремы.

Как часто бывает в математике, чтобы упростить решение задачи, нужно сформулировать ее для более общего случая. Первым шагом к доказательству самого Ван дер Вардена (и, по видимому, ко всем известным доказательствам) была догадка о том, что доказывать нужно более сильное утверждение, а именно: предполагать, что раскрашивается не вся числовая прямая, а лишь некоторый ее конечный кусок, размер которого зависит от количества цветов раскраски и длины прогрессии.

Мы обобщим задачу сразу в нескольких направлениях, главным из которых будет выход из числовой прямой на плоскость. Вместо раскраски множества целых чисел рассмотрим раскраску целочисленной решетки на плоскости в конечное число цветов. Выбрав в этой решетке *конечную фигуру M* (конечное множество точек), мы будем доказывать существование подобной ей одноцветной фигуры. Наше доказательство будет в основных идеях повторять доказательство Ван дер Вардена, но приобретет геометрическую наглядность, утерянную в вырожденном одномерном случае.

Сформулируем другие обобщения, которые будут сделаны. Во-первых, ясно, что перейдя от размерности один к размерности два, можно двинуться и дальше к случаю решетки в пространстве любой размерности. Во-вторых, условие подобия можно заменить на более сильное — гомотетичность с целым положительным коэффициентом. (В дальнейшем, говоря о гомотетии, мы всегда будем иметь в виду гомотетию с целым положительным коэффициентом.) Достаточно изящное доказательство такого обобщения теоремы было приведено П. Андерсоном [4], который, ссылаясь на Р. Радо, приписывает исходное доказательство Г. Грунвальду. Затем доказательство Андерсона было пересказано на русском языке В. В. Прасоловым [2].

Мы пойдем несколько дальше и будем предполагать, что «объектом раскраски» может служить не только решетка, но и всё пространство (при этом рассматриваемая фигура M может не вкладываться ни в какую решетку в этом пространстве). Вообще говоря, такое обобщение можно вывести из теоремы для решетки. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно (см. упражнение 4). Мы же, модернизировав доказательство Андерсона, добьемся того, чтобы оно сразу годилось для случая не только решетки, но и всего пространства.

Аналогично уже упомянутому усилению исходной (одномерной) теоремы Ван дер Вардена, будем предполагать в условии, что красится не всё пространство, а лишь конечная фигура в нём (зависящая от данной в условии фигуры и количества цветов раскраски).

Обозначим через L объект раскраски — либо пространство любой размерности, либо целочисленную решетку в пространстве. Будем говорить, что фигура $\widehat{M} \subset L$ является *монохроматической накрывающей ранга* k фигуры $M \subset L$, если для любой раскраски пространства (или решетки) L в k цветов существует одноцветная фигура $F \subset \widehat{M}$, гомотетичная M. Заметим, что образы монохроматической накрывающей при сдвиге и гомотетии также являются монохроматическими накрывающими той же фигуры того же ранга. Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема. *Для любой конечной фигуры $M \subset L$ и любого натурального числа k существует ее конечная монохроматическая накрывающая ранга k.*

Частные случаи

В этом параграфе мы докажем несколько частных случаев основной теоремы. Начав с простейшего случая теоремы Ван дер Вардена для двух цветов и прогрессии из трех членов, мы обобщим его в трех направлениях: выход на плоскость, увеличение количества цветов и увеличение количества точек. В результате мы получим доказательство того, что

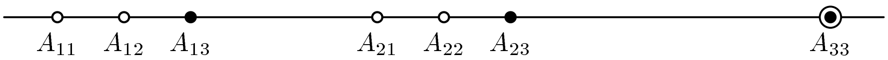

Рис. 1.

в раскрашенной в два цвета целочисленной решетке на плоскости найдется одноцветный квадрат. Тем самым, с одной стороны, будет решена непростая задача, представляющая самостоятельный интерес, а с другой стороны, будут представлены все основные идеи, необходимые для доказательства теоремы в общем случае, которое будет приведено в следующем параграфе. Иллюстрациями к нему смогут служить нижеприведенные примеры. Желающие сразу перейти к общему случаю, могут этот параграф пропустить.

1. *В раскрашенном в два цвета множестве целых чисел найдутся три одноцветных числа, образующие арифметическую прогрессию.*

Это простая задача, допускающая много различных решений. Мы приведем решение, которое станет основой для дальнейшего обобщения.

Рассмотрим на числовой прямой (тем самым, вместо чисел будем говорить о точках) девять троек точек вида $(x, x+1, x+2)$ (например, для $1 \leqslant x \leqslant 9$). Существует $2^3 = 8$ способов раскраски такой тройки точек, поэтому, согласно принципу Дирихле, какие-то две из рассматриваемых троек раскрашены одинаково. С другой стороны, в каждой тройке найдутся две одноцветные точки. Таким образом, мы получили четыре точки A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22}, раскрашенные одинаково (для определенности скажем, в белый цвет), причем $\overrightarrow{A_{11}A_{12}} = \overrightarrow{A_{21}A_{22}}$ (рис. 1). Отметим также точки A_{13} и A_{23} так, чтобы тройки A_{11}, A_{12}, A_{13} и A_{21}, A_{22}, A_{23} образовывали арифметические прогрессии. Если какая-то из этих двух точек белая, то искомая тройка найдена. Если же они обе черные, то рассмотрим точку A_{33}, образующую арифметическую прогрессию с точками A_{13} и A_{23}. Если точка A_{33} черная, то одноцветной будет тройка точек (A_{13}, A_{23}, A_{33}), а если белая, то тройка (A_{11}, A_{22}, A_{33}).

Координаты всех точек приведённой выше конструкции лежат в интервале между 1 и 21, поэтому монохроматической накрывающей ранга 2 для трех последовательных целых точек на прямой является множество из 21 последовательной целой точки.

2. *В раскрашенной в два цвета целочисленной решетке на плоскости найдется одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник.*

Рассмотрим прямую, параллельную оси решетки, и на ней найдем четыре одноцветные точки A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22}, расположенные так же, как и в предыдущем примере. Точки A_{13}, A_{23} и A_{33} выберем так, чтобы треугольники $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$ и $A_{13}A_{23}A_{33}$ были прямоугольными

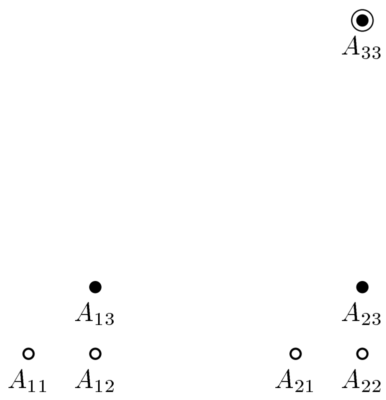

Рис. 2.

равнобедренными (рис. 2). Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения из п. 1. Все построенные точки лежат внутри квадрата 11×11, поэтому монохроматической накрывающей ранга 2 для равнобедренного прямоугольного треугольника будет множество точек целочисленной решетки, заполняющих квадрат 11×11.

Замечание. Нетрудно заметить, что случай произвольного треугольника фактически не отличается от разобранного. Действительно, условие теоремы инвариантно относительно аффинных преобразований, а все треугольники аффинно эквивалентны. Следует лишь уточнить в условии, что в качестве решетки нужно взять целочисленную решетку в некоторой косоугольной системе координат.

3. *В раскрашенной в три цвета целочисленной решетке на плоскости найдется одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник.*

Рассмотрим на плоскости достаточно большой (смысл слов «достаточно большой» будет уточнен ниже) квадрат, «нижняя» сторона которого лежит на оси абсцисс, и его всевозможные сдвиги на целочисленные векторы вдоль этой оси. Среди полученных квадратов найдутся два одинаково окрашенных, поскольку количество всевозможных раскрасок квадрата конечно. Обозначим эти квадраты Φ_1 и Φ_2. Аналогично, внутри квадрата Φ_1 найдем два одинаково раскрашенных квадрата Φ_{11} и Φ_{12} меньшего размера (также имеющие по стороне на оси абсцисс). Соответствующие им квадраты внутри квадрата Φ_2 обозначим Φ_{21} и Φ_{22} соответственно. На стороне квадрата Φ_{11}, лежащей на оси абсцисс, найдем две одноцветные точки A_{111} и A_{112} (условием их существования и определяются размеры всех упоминаемых квадратов, в частности, квадрат Φ_{11} должен иметь размер 4×4). Соответственно одноцветные пары

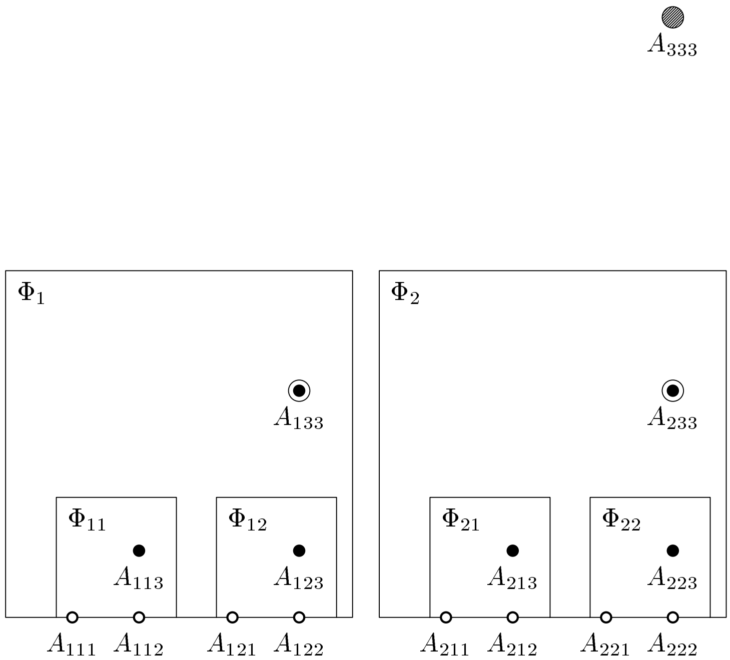

Рис. 3.

(A_{121}, A_{122}), (A_{211}, A_{212}) и (A_{221}, A_{222}) будут внутри квадратов Φ_{12}, Φ_{21} и Φ_{22} (рис. 3). Построим точки $A_{i_1i_23}$ $(1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant 2)$ так, чтобы треугольники $A_{i_1i_21}A_{i_1i_22}A_{i_1i_23}$ были равнобедренными прямоугольными. Далее строим точки A_{i_133} $(1 \leqslant i_1 \leqslant 2)$ так, чтобы треугольники $A_{i_113}A_{i_123}A_{i_133}$ были равнобедренными прямоугольными. Наконец, находим точку A_{333}, чтобы треугольник $A_{133}A_{233}A_{333}$ был равнобедренным прямоугольным. Получившаяся конструкция из 15 точек $A_{i_1i_2i_3}$ содержит 8 точек, индексы которых равны 1 или 2 (их мы назовем *основными*), и 7 точек, имеющих хотя бы один индекс, равный 3 (а их назовем *добавочными*). Все основные точки одноцветные. Если хотя бы одна из добавочных точек того же цвета, то одноцветный треугольник легко находится. В противном случае каждая из них покрашена в один из оставшихся двух цветов, при этом к конструкции из добавочных точек можно применить рассуждение из п. 2.

Замечание. Аналогичным образом наращивая приведённую конструкцию, можно доказать, что одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник существует при раскраске решетки в любое конечное число цветов. Мы будем использовать этот факт в п. 4, хотя строгое его доказательство отложим до общего случая.

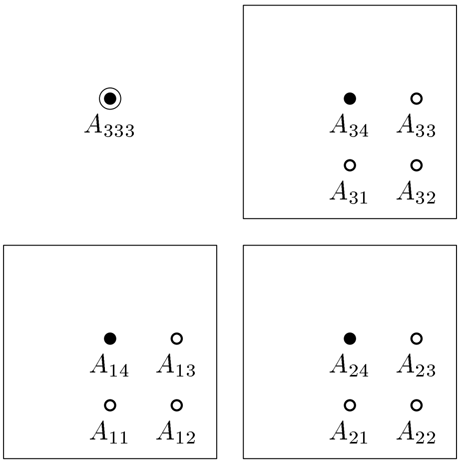

Рис. 4.

4. *В раскрашенной в два цвета целочисленной решетке на плоскости найдется одноцветный квадрат.*

Рассмотрим новую раскраску решетки, получаемую из данной следующим образом. Цвет точки определяется цветом квадрата 11×11 с левым нижним углом в ней. Количество цветов такой раскраски равно 2^{121}. Найдется одноцветный (в смысле этой раскраски) равнобедренный прямоугольный треугольник. Это значит, что существуют три равных одинаково окрашенных квадрата 11×11, расположенных в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. В любом из них, согласно п. 2, найдется одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник. Выберем такой треугольник в одном из квадратов, в остальных рассмотрим треугольники, соответствующие ему при наложении квадратов. Мы получаем три одноцветных (белых) равнобедренных прямоугольных треугольника $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$ и $A_{31}A_{32}A_{33}$ (рис. 4). Дополним каждый из них до квадрата точками A_{14}, A_{24} и A_{34} соответственно. Если одна из этих точек белая, то искомый одноцветный квадрат найден. Если же все они черные, то рассмотрим точку A_{44}, дополняющую до квадрата треугольник $A_{14}A_{24}A_{34}$. Если эта точка черная, то искомым одноцветным квадратом будет $A_{14}A_{24}A_{34}A_{44}$, а если белая — то $A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$.

Доказательство основной теоремы

Перейдем к доказательству основной теоремы, сформулированной на с. 152. Будем использовать индукцию по количеству точек фигуры M, которое мы обозначим n.

База индукции ($n = 2$) очевидна. Действительно, пусть множество M состоит из двух точек. На соединяющей их прямой отложим $k+1$ точку так, чтобы расстояния между соседними точками были равны расстоянию между точками фигуры M. Согласно принципу Дирихле, среди этих точек найдутся две одноцветные. Они и будут составлять фигуру, гомотетичную M. Значит, построенное множество из $k+1$ точки и будет монохроматической накрывающей ранга k.

Шаг индукции. Пусть мы имеем натуральное число k и фигуру $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}\}$, содержащую $n+1$ точку. Зафиксируем в L точку O, которую будем называть началом координат. Радиус-векторы точек фигуры M обозначим $\vec{v}_i = \overrightarrow{OM_i}$. Согласно предположению индукции, для фигуры $M' = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, содержащей n точек, монохроматическая накрывающая любого ранга (а не только ранга k) существует.

При наличии начала координат любая конечная фигура может быть задана набором векторов, а именно, множеством радиус-векторов ее точек. Будем называть конечную фигуру в пространстве с фиксированным началом координат *шаблоном*. Шаблон может быть «приложен» к любой точке плоскости. Эта операция означает его сдвиг на вектор, соединяющий начало координат с точкой приложения. Всякий шаблон из n точек в пространстве, раскрашенном в k цветов, естественным образом порождает новую раскраску в k^n цветов. Цвет каждой точки определяется набором цветов (в исходной раскраске) приложенного к ней шаблона.

Выберем в L конечную последовательность шаблонов $\Phi^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots, k$) следующим образом. Шаблон $\Phi^{(0)}$ является *тривиальным* (состоит из одной точки — начала координат). При $j \geqslant 1$ шаблон $\Phi^{(j)}$ строим (используя уже построенный шаблон $\Phi^{(j-1)}$) следующим образом. Сначала определим фигуру $\Phi''^{(j)}$ как монохроматическую накрывающую ранга $k^{|\Phi^{(j-1)}|}$ фигуры M' (знак модуля означает количество точек, составляющих фигуру). Затем построим фигуру $\Phi'^{(j)} = \bigcup\limits_{A \in \Phi''^{(j)}} \Phi_A^{(j-1)}$ — объединение шаблонов $\Phi^{(j-1)}$, приложенных ко всем точкам фигуры $\Phi''^{(j)}$. Наконец расширим $\Phi'^{(j)}$ до $\Phi^{(j)}$ так, чтобы для любого гомотетичного образа $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ множества M, для которого $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Phi'^{(j)}$, было выполнено $A_{n+1} \in \Phi^{(j)}$.

Докажем, что $\Phi^{(k)}$ и будет монохроматической накрывающей ранга k фигуры M. Для этого построим последовательность фигур C_j ($j = 0, 1, \ldots, k$), которые мы назовем *конструкциями*. Каждая конструкция C_j состоит из точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_j}$ (иными словами, точки конструкции C_j мы будем обозначать буквой A с j индексами). Индексы изменяются от 1 до $n+1$, но со следующим ограничением, которое мы назовем *условием мажорирования*: если какой-либо индекс равен $n+1$, то и все последующие также равны $n+1$. Точки, все индексы которых не превосходят n, будем называть *основными*, а имеющие индекс равный $n+1$ — *добавочными*. При построении конструкции мы будем добиваться выполнения *условия изотропности*: чтобы шаблон $\Phi^{(k-j)}$ был окрашен одинаково, будучи приложенным ко всем основным точкам фигуры C_j.

Построение будем опять осуществлять по индукции. Конструкция C_0 состоит из одной точки A (без индексов). Условие изотропности для одноточечной конструкции, очевидно, выполняется. Без ограничения общности можно считать, что точка A совпадает с началом координат O. Опишем построение конструкции C_j в предположении, что C_{j-1} уже построена. К каждой точке конструкции C_{j-1} приложим шаблон $\Phi^{(k-j+1)}$. Для всех основных точек эти шаблоны окрашены одинаково, поскольку по предположению индукции условие изотропности для C_{j-1} выполняется. Сузим один из этих шаблонов (приложенный к некоторой выбранной основной точке T) до шаблона $\Phi'^{(k-j+1)}$, а в нём найдем одноцветную с точки зрения раскраски, порожденной шаблоном $\Phi^{(k-j)}$ (это обеспечит изотропность конструкции на следующем шаге), гомотетичную M' фигуру. Затем получившуюся фигуру дополним до фигуры, гомотетичной M, принадлежащей исходному несуженному шаблону $\Phi^{(k-j+1)}$. Вектор, соединяющий точку приложения шаблона с центром гомотетии, обозначим u_j, а коэффициент гомотетии обозначим λ_j. Перенесем параллельно полученную фигуру всевозможными сдвигами, переводящими выбранную точку T во все остальные точки конструкции C_{j-1} (в том числе и добавочные). Таким образом, каждая точка конструкции C_{j-1} породит $n+1$ дочернюю точку. Обозначим их, приписывая к обозначению соответствующей материнской точки очередной j-й индекс, изменяющийся от 1 до $n+1$. Тогда векторы, соединяющие точки конструкции C_{j-1} с дочерними точками, выражаются формулой

$$\overrightarrow{A_{i_1 i_2 \ldots i_{j-1}} A_{i_1 i_2 \ldots i_{j-1} i_j}} = \vec{u}_j + \lambda_j \vec{v}_{i_j},$$

откуда легко получить формулу для радиус-вектора любой точки:

$$\overrightarrow{OA_{i_1 i_2 \ldots i_j}} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_j) + \lambda_1 \vec{v}_{i_1} + \lambda_2 \vec{v}_{i_2} + \cdots + \lambda_j \vec{v}_{i_j}. \qquad (1)$$

Наконец, из всех полученных точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_j}$ сотрем те, чей набор индексов не удовлетворяет условию мажорирования. В результате мы получим искомую конструкцию C_j.

Нам понадобятся три вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Точка $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ при любом j принадлежит шаблону $\Phi^{(j)}$, приложенному к точке $A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-j}}$. В частности ($j = k$), все точки конструкции C_k принадлежат $\Phi^{(k)}$.*

Доказательство. Применим индукцию по j. База ($j = 0$) очевидна: любая точка принадлежит приложенному к ней тривиальному шаблону. Шаг индукции следует из того, что шаблон $\Phi^{(j)}$, приложенный к точке $A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-j}}$ содержит в себе объединение фигур, полученных приложением шаблона $\Phi^{(j-1)}$ к нескольким точкам, в том числе и к $A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-j+1}}$.

Лемма 2. *Пусть среди точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ выбрано упорядоченное множество из $n+1$ точки так, что для каждого индекса выполнено одно из двух: либо он одинаков для всех точек множества, либо для каждой точки он равен ее номеру. Тогда выбранное множество гомотетично M.*

Доказательство. Обозначим выбранные точки $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$. Пусть индексы (в исходных обозначениях), для которых выполняется второй из указанных в условии случаев, имеют номера $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Тогда из формулы (1) следует

$$\overrightarrow{F_s F_t} = \overrightarrow{OF_t} - \overrightarrow{OF_s} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{j_i} (\vec{v}_t - \vec{v}_s) = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{j_i} \right) \overrightarrow{M_s M_t}.$$

А это и означает, что выбранные точки составляют фигуру, гомотетичную M с коэффициентом $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_{j_i}$.

Лемма 3. *Изменение не равного $n+1$ значения любого индекса любой точки на другое значение, также не равное $n+1$, не меняет ее цвета.*

Доказательство. Точки $A_{i_1 \ldots i'_j \ldots i_k}$ и $A_{i_1 \ldots i''_j \ldots i_k}$, отличающиеся лишь в j-м индексе являются соответствующими точками шаблона $\Phi^{(k-j)}$, приложенного к точкам $A_{i_1 \ldots i'_j}$ и $A_{i_1 \ldots i''_j}$. Но по условию изотропности эти шаблоны раскрашены одинаково, значит и соответствующие их точки одноцветны.

Перейдем к завершению доказательства основной теоремы. Согласно лемме 1, шаблон $\Phi^{(k)}$ содержит в себе конструкцию C_k. Из леммы 3 следует, что все основные точки этой конструкции окрашены в один цвет. Назовем этот цвет первым. Рассмотрим некоторую добавочную точку $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Введем для нее альтернативное обозначение F_{n+1}, и построим n основных точек F_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), получаемых из F_{n+1} заменой в индексах ее исходного выражения $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ всех чисел $n+1$ на s. По лемме 2, полученное множество точек $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}\}$ гомотетично M. Значит, если хотя бы одна добавочная точка окрашена в первый цвет, то искомое одноцветное множество найдено. В противном случае рассмотрим множество таких добавочных точек, у которых только последний индекс равен $n+1$. Опять же, по лемме 3 они все окрашены в один цвет;

назовем его вторым. Рассуждая аналогично, получим, что если во второй цвет окрашена хотя бы одна из точек, у которой числу $n+1$ равны два последних индекса, то утверждение доказано. Продолжая эти рассуждения (строго говоря, применяя индукцию), мы приходим к выводу, что утверждение доказано, если при некотором $s \leqslant k$ в один из первых s цветов (порядок на множестве цветов возникает при этом естественным образом) окрашена хотя бы одна точка, у которой последние s индексов равны $n+1$. Последнее же, очевидно, справедливо при $s = k$, поскольку точка $A_{n+1,n+1,\ldots,n+1}$ окрашена в один из данных k цветов.

Автор благодарит В. А. Клепцына и М. Н. Вялого за полезные обсуждения.

Упражнения

1. Покажите, что теорема Ван дер Вардена является частным случаем доказанной теоремы.

2. Можно ли при доказательстве теоремы в качестве базы индукции взять более простой случай $n = 1$?

3. Некоторые из точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ из приведённой в доказательстве конструкции могут совпадать. Покажите, что и в этом случае доказательство остается в силе.

4. В предположении, что теорема доказана только для случая целочисленной решетки, приведите короткое рассуждение, доказывающее ее в полной общности.

Указание: решетка большей размерности может быть вложена (например, с помощью проецирования) в пространство меньшей размерности.

Список литературы

[1] *Р. Грэхем.* Начала теории Рамсея. М. Мир. 1984.

[2] *В. В. Прасолов.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М. Фазис. 1997.

[3] *А. Я. Хинчин.* Три жемчужины теории чисел. М. Наука. 1979.

[4] *P. G. Anderson.* A generalizatoion of Baudet's conjecture (Van der Waerden theorem). Amer. Math. Monthly, 1976, **83**, 359–361.

В. О. Бугаенко, Московский независимый университет

E-mail: `bugaenko@mccme.ru`