

## О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского

П. В. Бибилов      И. В. Ткаченко

В геометрии Лобачевского «замечательных точек» в треугольнике «больше», чем в евклидовой геометрии. В данной статье рассматриваются *трисектор* и точка пересечения *бисекционных отрезков*. Точка  $T$  называется трисектором треугольника  $ABC$ , если площади треугольников  $TAB$ ,  $TAC$ ,  $TBC$  равны одной трети площади треугольника  $ABC$ . Бисекционным отрезком называется отрезок, который проходит через вершину треугольника и делит его на два равновеликих. Оказывается, что бисекционные отрезки треугольника пересекаются в одной точке. В евклидовой геометрии обе эти точки совпадают с точкой пересечения медиан.

### 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Геометрию Лобачевского можно интерпретировать с помощью терминов и объектов геометрии Евклида (иначе говоря, внутри евклидовой геометрии можно построить *модель* геометрии Лобачевского). Первая из подобных моделей (*модель Кэли – Клейна*) была создана для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. Здесь мы будем использовать другую модель — *модель Пуанкаре*. Эта модель во многом удобнее модели Кэли – Клейна.

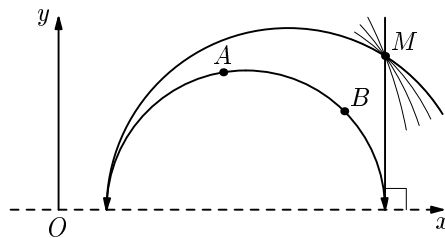


Рис. 1.

*Плоскость Лобачевского* в модели Пуанкаре представляет собой верхнюю полуплоскость  $\{(x; y) \mid y > 0\}$  без границы  $\{y = 0\}$ . Прямую  $\{y = 0\}$

вместе с бесконечно удаленной точкой назовем *абсолютом*. *Прямыми в геометрии Лобачевского* называются верхние полуокружности с центрами на абсолюте и лучи, перпендикулярные абсолюту. Точки абсолюта назовем *бесконечно удаленными*. *Параллельными прямыми в геометрии Лобачевского* являются прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку. Прямые, не имеющие общих (в том числе и бесконечно удаленных) точек, называются *сверхпараллельными*.

Нетрудно проверить, что модель Пуанкаре удовлетворяет всем аксиомам и постулатам абсолютной геометрии, кроме пятого постулата (через точку, не лежащую на данной прямой, проходят две прямые, параллельные данной, и бесконечное количество прямых, сверхпараллельных с данной), и построенная модель геометрии Лобачевского является *логически непротиворечивой* (если непротиворечива евклидова геометрия).

*Углы между прямыми в геометрии Лобачевского* равны углам между касательными, проведенными в точке пересечения соответствующих полуокружностей. Признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского совпадают с тремя признаками в евклидовой геометрии. Кроме того, к ним добавляется еще и четвертый признак: *равны треугольники с попарно равными углами*.

*Площадь треугольника в геометрии Лобачевского* равна

$$\pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника.

Для вычисления расстояния на плоскости Лобачевского удобно ввести в модели Пуанкаре комплексные координаты так, чтобы действительная ось совпадала с абсолютом, а положительный луч мнимой оси был направлен в полуплоскость модели Пуанкаре. Расстояние на плоскости Лобачевского между точками с координатами  $z_1$  и  $z_2$  равно

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}. \quad (1)$$

(См., например, [2].)

## 2. ЭКВИДИСТАНТЫ

*Эквидистанта* есть геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от прямой  $u$  (эту сторону мы будем называть *полуплоскостью эквидистанты*) на одинаковых расстояниях от нее. Прямая  $u$  называется *базой* эквидистанты, величина расстояния  $h$  — *высотой*.

**ТЕОРЕМА 1.** *Для перпендикулярных абсолюту лучей с началом в точке  $O$  эквидистантами являются наклонные лучи с тем же началом в точке  $O$ .*

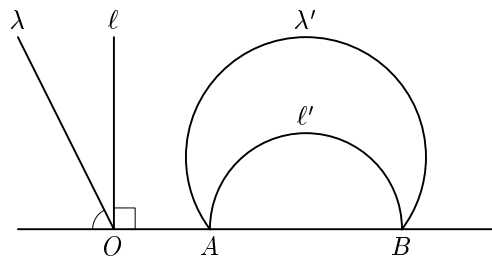


Рис. 2.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Без ограничения общности считаем, что  $O$  совпадает с началом координат (формула (1) инвариантна относительно сдвигов вдоль действительной оси). Возьмем на перпендикулярном абсолюту луче  $\ell$  произвольную точку  $z_1$  и проведем через нее окружность с центром в точке  $O$  (в геометрии Лобачевского это перпендикуляр к прямой  $\ell$ ). Пусть она пересекает наклонный луч  $\lambda$  в некоторой точке  $z_2$ . Из соображений подобия очевидно, что основанием перпендикуляра для любой точки  $pz_2$  на луче  $\lambda$  будет точка  $pz_1$ . Так как

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} = \ln \frac{|pz_1 - p\bar{z}_2| + |pz_1 - pz_2|}{|pz_1 - p\bar{z}_2| - |pz_1 - pz_2|} = \rho(pz_1, pz_2),$$

расстояние между лучами  $\ell$  и  $\lambda$  постоянно. Значит,  $\lambda$  является эквидистантой для прямой  $\ell$  (очевидно, что других точек в полуплоскости эквидистанты, удаленных на то же расстояние от  $\ell$ , нет).

**ТЕОРЕМА 2.** Для верхних полуокружностей, проходящих через бесконечно удаленные точки  $A$  и  $B$ , эквидистантами являются верхние дуги окружностей, проходящих через точки  $A$  и  $B$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем луч  $\ell$ , перпендикулярный абсолюту, с началом в точке  $A$ , и произвольную его эквидистанту  $\lambda$ . Проведем инверсию относительно окружности с центром в точке  $B$  и радиусом  $BA$ . По свойствам инверсии луч  $\ell$  перейдет в верхнюю полуокружность, проходящую через точки  $A$  и  $B$ , а эквидистанта  $\lambda$  — в дугу окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Поскольку инверсия сохраняет углы, она сохраняет и расстояния. Значит, эквидистанта перейдет в эквидистанту.

**ТЕОРЕМА 3.** Каждая прямая имеет с эквидистантой не более двух общих точек.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку в модели Пуанкаре прямые и эквидистанты являются евклидовыми окружностями или прямыми, то это утверждение следует из того, что прямые и окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.

## 3. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК ХАЙАМА – САККЕРИ

В истории вопроса о параллельных линиях большую роль сыграл четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Впервые этот четырехугольник рассматривал Омар Хайам (1048–1122). Эта же фигура была положена в основу построения теории параллельных итальянским математиком Саккери (1667–1733), которому удалось получить ряд теорем неевклидовой геометрии. Однако Саккери ошибочно считал, что ему удалось обнаружить противоречие среди следствий положения, отрицающего постулат Евклида, и тем самым доказать этот постулат. Лобачевский не знал о работах Хайама и Саккери, однако и он в своих работах часто рассматривал тот же специальный вид четырехугольника, который мы будем в дальнейшем называть *четырёхугольником Хайама – Саккери* или *четырёхугольником Саккери*.

Итак, рассмотрим четырехугольник  $ABCD$  с двумя прямыми углами при вершинах  $A$  и  $B$  и с равными сторонами  $AD = BC$ . Будем называть сторону  $AB$  *базой*, сторону  $CD$  *антибазой* этого четырехугольника, а стороны  $AD$  и  $BC$  его *боковыми сторонами*. Отметим одно важное свойство четырехугольника Саккери: *углы при антибазе равны*. Из него следует, в частности, что углы при антибазе острые.

Пусть теперь  $ABC$  – произвольный треугольник, а  $MN$  – прямая, проходящая через середины  $M$  и  $N$  сторон  $AC$  и  $BC$ . Проведем перпендикуляры  $AP$ ,  $BQ$  и  $CR$  к прямой  $MN$  и докажем, что они равны друг другу. Рассмотрим треугольники  $APM$  и  $CMR$ . Они равны по гипотенузе и острому углу, значит,  $AP = CR$ . Рассмотрим треугольники  $BNQ$  и  $CNR$ . Они равны по гипотенузе и острому углу, значит,  $BQ = CR$ . Поэтому  $AP = BQ = CR$ . Таким образом,  $ABQP$  – четырехугольник Саккери с базой  $PQ$ . Будем говорить, что этот четырехугольник *присоединен к треугольнику  $ABC$  по стороне  $AB$* .

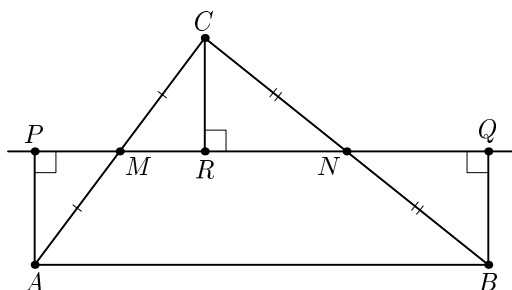


Рис. 3.

**ТЕОРЕМА 4.** *Каждый из острых углов четырехугольника Саккери, присоединенного к данному треугольнику  $ABC$ , равен  $\sigma/2$ , где  $\sigma$  — сумма углов треугольника  $ABC$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $ABQP$  — четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику  $ABC$  по стороне  $AB$ . Докажем, что  $\angle BAP = \angle ABQ = \sigma/2$ . Рассмотрим случай, когда середины  $M$  и  $N$  боковых сторон треугольника лежат на отрезке  $PQ$  (другие случаи аналогичны). Пусть  $CR$  — перпендикуляр к прямой  $MN$ . Так как  $\triangle APM = \triangle CRM$  и  $\triangle BQN = \triangle CRN$ , то  $\angle ACR = \angle PAM$  и  $\angle BCR = \angle QBN$ . Но  $\angle PAB + \angle QBA = \angle PAM + \angle CAB + \angle ABC + \angle NBQ = \angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = \sigma$ . Учитывая, что  $\angle PAB = \angle QBA$ , получаем  $\angle PAB = \angle QBA = \sigma/2$ .

**ТЕОРЕМА 5.** *Четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику  $ABC$ , равновелик с ним.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $ABQP$  — четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику  $ABC$  по стороне  $AB$ . Докажем, что площади этого четырехугольника и треугольника равны. Рассмотрим случай, когда середины  $M$  и  $N$  боковых сторон треугольника лежат на отрезке  $PQ$  (другие случаи разбираются аналогично). Пусть  $CR$  — перпендикуляр к прямой  $MN$ . Так как  $\triangle APM = \triangle CRM$  и  $\triangle BQN = \triangle CRN$ , то  $S(ABQP) = S(AMNB) + S(APM) + S(BQN) = S(AMNB) + S(CMR) + S(CNR) = S(ABC)$ , что и требовалось.

**ТЕОРЕМА 6.** *Пусть антибаза четырехугольника Саккери равна  $a$ , боковая сторона равна  $h$ , а площадь равна  $S$ . Тогда*

$$\operatorname{th} h = \sin \frac{S}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Здесь и далее мы будем использовать стандартные факты гиперболической тригонометрии. Найти из можно, например, в [1, 5].

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть дан четырехугольник Саккери  $ABQP$  с антибазой  $AB = a$  и углом  $\sigma$  при ней. Введем следующие обозначения:  $AQ = x$ ,  $\angle AQB = \varphi$ . Тогда

$$\frac{\operatorname{sh} h}{\operatorname{sh} x} = \cos \varphi = \frac{\operatorname{ch} h \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} h \operatorname{sh} x}$$

(первое равенство — теорема синусов в треугольнике  $APQ$ , второе — теорема косинусов в треугольнике  $ABQ$ ). Кроме того, по теореме косинусов в треугольнике  $ABQ$  получаем, что

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} h \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} h \operatorname{sh} a \cos \sigma,$$

где  $\sigma$  — острый угол в четырехугольнике Саккери. Подставляя это

равенство в первую формулу и упрощая, получаем

$$\operatorname{th} h = \cos \sigma \operatorname{cth} \frac{a}{2}.$$

Осталось воспользоваться формулой площади четырехугольника:  $S = 2\pi - (\pi + 2\sigma) = \pi - 2\sigma$ .

#### 4. ТРИСЕКТОР

##### 4.1. Одно геометрическое место точек

Найдем геометрическое место точек, образующих с данным отрезком треугольники данной площади.

**ТЕОРЕМА 7.** *Геометрическим местом точек, образующих с данным отрезком треугольники данной площади, является эквидистанта.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем произвольный отрезок  $AB$  на прямой  $\ell$ . Построим четырехугольник Саккери  $ABCD$  с антибазой  $AB$  и данной площадью  $S$ . В каждой точке  $H$  прямой  $p$ , содержащей отрезок  $CD$ , в полуплоскость, не содержащую точки  $A$  относительно прямой  $p$ , восстановим перпендикуляр  $HX = AC$  (рис. 4). Очевидно, что множество всех точек  $X$  есть эквидистанта с базой  $p$ . С другой стороны, площадь каждого треугольника  $AXB$  равна площади четырехугольника Саккери  $ABDC$  и других искомым точек  $Y$  в полуплоскости эквидистанты нет. Действительно, взяв точку пересечения эквидистанты с перпендикуляром к прямой  $\ell$ , проходящим через точку  $Y$ , получим, что либо  $\triangle AXB \subset \triangle AYB$ , либо  $\triangle AYB \subset \triangle AXB$ , т.е.  $S(\triangle AXB) \neq S(\triangle AYB)$ . Значит, эквидистанта действительно является искомым ГМТ.

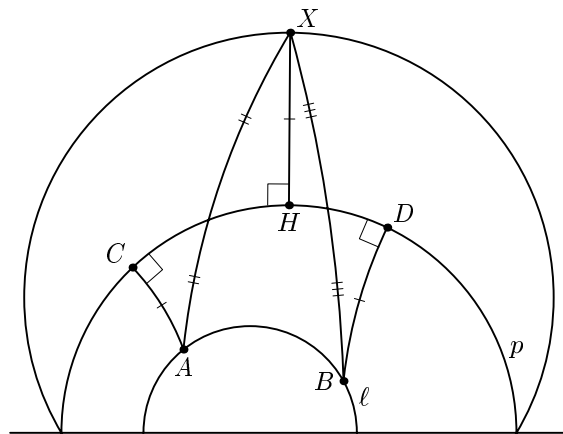


Рис. 4.

В этом случае будем говорить, что эквидистанта *ограничивает* треугольники данной площади  $S$ . Из формулы (2) немедленно следует, что высота ограничивающей эквидистанты выражается по формуле

$$\operatorname{th} h = \sin \frac{S}{2} \operatorname{cth} \frac{a}{2},$$

где  $AB = a$  — длина данного отрезка.

#### 4.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ТРИСЕКТОРА

**ТЕОРЕМА 8.** *В каждом треугольнике существует трисектор, лежащий внутри треугольника.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** На двух сторонах треугольника  $ABC$  построим эквидистанты  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , ограничивающие треугольники площади, равной одной трети площади треугольника  $ABC$ . Докажем, что они пересекутся внутри треугольника  $ABC$ . Действительно, пусть эквидистанты построены на сторонах  $AB$  и  $AC$ , точки  $M_1, N_2$  лежат на  $BC$ , точка  $M_2$  — на  $AB$ , а точка  $N_1$  — на  $AC$ , при этом  $S(ABM_1) = S(ABN_1) = S(ACM_2) = S(ACN_2) = S(ABC)/3$ , и построенные эквидистанты, проходящие соответственно через точки  $M_1, N_1$  и  $M_2, N_2$ , не пересекаются. Тогда  $BN_2 < BM_1$ . Отсюда получаем, что  $2S(ABC)/3 = S(ACM_1) < S(ACN_2) = S(ABC)/3$  — противоречие, значит, эквидистанты пересекаются в искомой точке  $T$ .

**ТЕОРЕМА 9.** *Для данного треугольника существует ровно один трисектор.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что для треугольника  $ABC$  существуют два трисектора  $T$  и  $T_1$ . Обозначим через  $A', B', C'$  точки, которые лежат на прямых  $AT, BT, CT$  соответственно, причем точка  $T$  лежит между  $A$  и  $A', B$  и  $B', C$  и  $C'$ . Плоскость разбивается лучами  $TA', TB', TC'$  на три угла. Точка  $T_1$  попадает в один из них, допустим, это угол  $A'TB'$ . Тогда  $S(ABC)/3 = S(ABT) < S(ABT_1) = S(ABC)/3$  — противоречие.

#### 5. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИСЕКЦИОННЫХ ОТРЕЗКОВ

Проведем в треугольнике  $ABC$  бисекционный отрезок  $CX$ . Будем использовать обозначения с рис. 5.

Поскольку площадь треугольника  $CXB$  равна половине площади треугольника  $ABC$ , то

$$\pi - (x + u + \beta) = \frac{\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2},$$

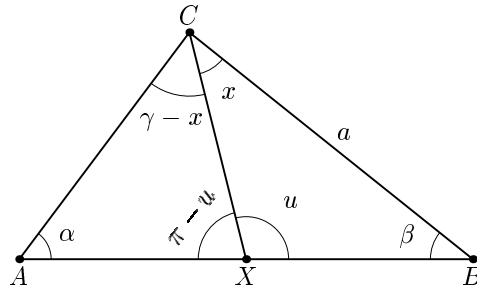


Рис. 5.

откуда

$$x + u + \beta = \frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \frac{\pi + \alpha - \beta + \gamma}{2}, \quad \omega = \frac{\pi + \alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

ЛЕММА 1.  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma}{\sin \gamma (\cos \varphi + \cos \beta)}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3) получаем  $x + u = \varphi$ . По второй теореме косинусов для треугольника  $CXB$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \frac{\cos u + \cos x \cos \beta}{\sin x \sin \beta}, \\ \operatorname{ch} a \sin x \sin \beta &= \cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x + \cos x \cos \beta, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\operatorname{ch} a \sin \beta - \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

По второй теореме косинусов для треугольника  $ABC$

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Подставим в (4) и получим

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} - \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \beta} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma}{\sin \gamma (\cos \varphi + \cos \beta)}. \quad (5)$$

ЛЕММА 2.  $\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} = \frac{\sin x}{\sin \gamma \cos x - \sin x \cos \gamma} = \frac{1}{\sin \gamma \operatorname{ctg} x - \cos \gamma} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma - \sin \varphi \sin \gamma}{\cos \varphi + \cos \beta} - \cos \gamma} = \frac{\cos \varphi + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \gamma)} = \\
 &= \frac{\cos(\omega - \beta) + \cos \beta}{\cos \alpha + \cos(\omega - \alpha)} = \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)}.
 \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из

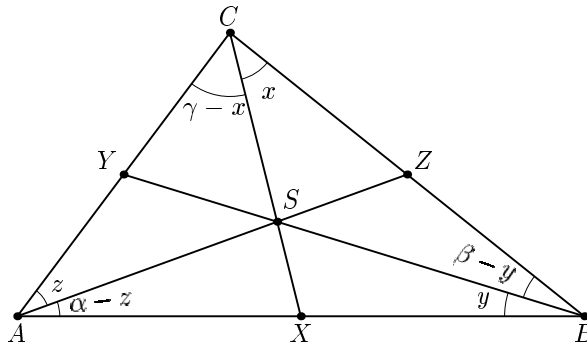
$$\varphi - \gamma = \frac{\pi + \alpha - \beta - \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi - \alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - (\omega - \alpha).$$

**ТЕОРЕМА 10.** *Бисекционные отрезки пересекаются в одной точке.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В доказательстве используем теорему Чевы для геометрии Лобачевского [1]: если

$$\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} \cdot \frac{\sin z}{\sin(\alpha - z)} = 1, \tag{6}$$

то отрезки пересекаются в одной точке (обозначения на рис. 6).



**Рис. 6.**

Преобразуем левую часть формулы (6) с помощью леммы 2. Получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sin x}{\sin(\gamma - x)} \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)} \cdot \frac{\sin z}{\sin(\alpha - z)} = \\
 &= \frac{\cos(\omega/2 - \beta)}{\cos(\omega/2 - \alpha)} \cdot \frac{\cos(\omega/2 - \alpha)}{\cos(\omega/2 - \gamma)} \cdot \frac{\cos(\omega/2 - \gamma)}{\cos(\omega/2 - \beta)} = 1,
 \end{aligned}$$

что и требовалось.

## 6. ТРИСЕКТОР, ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИСЕКЦИОННЫХ ОТРЕЗКОВ И ДРУГИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом разделе мы проверим, что найденные выше точки — трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков — в общем случае не совпадают друг с другом и с другими замечательными точками треугольника:

ни с точкой пересечения медиан (как в геометрии Евклида), ни с точкой пересечения биссектрис, ни с точкой пересечения высот.

Для анализа взаимного расположения этих точек нам потребуется изучить геометрическое место точек, образующих с двумя данными отрезками с общим концом треугольники равной площади и лежащих внутри образованного этими отрезками угла. Назовем это ГМТ  $\Sigma$ . (Будем также использовать обозначения  $\Sigma_O$  или  $\Sigma_{AOB}$ , если нужно указать вершину угла или весь угол, относительно которого строится кривая  $\Sigma$ .)

Докажем следующий важный факт, относящийся к структуре  $\Sigma$ .

**ТЕОРЕМА 11.** *В общем случае любая прямая, проходящая через вершину угла, пересекает  $\Sigma$  не более одного раза (помимо вершины угла).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное: пусть есть угол  $\widehat{AOB}$ , прямая  $\ell$  проходит через вершину  $O$  угла и пересекает  $\Sigma_{AOB}$  в двух точках  $M$  и  $N$ , тогда  $S(OAM) = S(OBM)$ ,  $S(OAN) = S(OBN)$ ,  $S(AMN) = S(BMN)$ . Отразим точку  $B$  симметрично относительно прямой  $\ell$ , получим точку  $B_1$ , не совпадающую с  $A$ , для которой верны эти же равенства (рис. 7; если точки  $A$  и  $B_1$  совпадают, то  $OA = OB$  и  $\Sigma_{AOB}$  является биссектрисой угла  $\widehat{OAB}$ ).

Докажем, что у всех этих треугольников общая средняя линия. Действительно, так как  $S(OAM) = S(OB_1M)$ , то у них общая средняя линия  $p$ , проходящая, в частности, и через середины сторон  $AM$  и  $B_1M$ , а значит, и через середины сторон  $AN$  и  $B_1N$  (см. рис. 7 и теорему 7).

Рассмотрим четырехугольники Саккери, присоединенные к треугольникам  $AOM$  и  $AMN$  по сторонам  $OM$  и  $MN$  соответственно. У этих

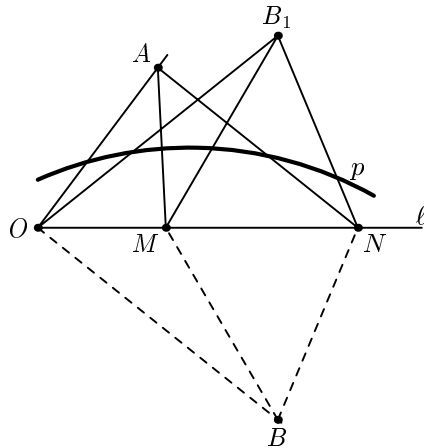


Рис. 7.

четыреугольников есть общая боковая сторона, поэтому расстояния от точек  $O$ ,  $M$  и  $N$  до прямой  $p$  равны. Пришли к противоречию, так как прямая  $l$  не может пересекать эквидистанту в трех точках.

**СЛЕДСТВИЕ.** Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают.

**ТЕОРЕМА 12.** Пусть  $AB < BC$ ,  $BL$  — биссектриса угла  $\widehat{ABC}$ . Тогда кривая  $\Sigma_{ABC}$  целиком лежит в угле  $\widehat{LBC}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $N$  — произвольная точка  $\Sigma_{ABC}$ . Предположим, что точка  $N$  лежит в угле  $\widehat{ABL}$ . Отразим треугольник  $ABN$  относительно биссектрисы  $BL$  и получим треугольник  $A_1BN_1$ , где точка  $A_1$  лежит на  $BC$ , а точка  $N_1$  — внутри треугольника  $A_1BN$ . Приходим к противоречию:

$$S(ABN) = S(A_1BN_1) < S(A_1BN) < S(CBN),$$

но  $S(ABN) = S(CBN)$  по определению  $\Sigma$ .

**СЛЕДСТВИЕ.** Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения биссектрис.

**СЛЕДСТВИЕ.** Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения высот.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть так же, как в теореме,  $AB < BC$ , а  $BL$  — биссектриса,  $BH$  — высота в треугольнике  $ABC$ . Точно так же, как в евклидовой геометрии, докажем, что  $H$  лежит на отрезке  $AL$ . Отразим  $A$  относительно  $BH$ , получим точку  $A_1$  на стороне  $AC$ . Треугольник  $ABA_1$  равнобедренный, поэтому  $BH$  является его биссектрисой. Так как  $\angle ABA_1 < \angle ABC$ , то  $\angle ABH < \angle ABL$ .

**ТЕОРЕМА 13.** Пусть  $AB < BC$ ,  $M$  — основание медианы треугольника  $ABC$ , проведенной из вершины  $B$ . Тогда часть  $\Sigma_{ABC}$ , находящаяся внутри треугольника  $ABC$ , лежит в треугольнике  $ABM$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $T_1$  точку, симметричную  $B$  относительно точки  $M$ . Легко проверить, что  $T_1$  лежит на  $\Sigma_{ABC}$ . Если найти на луче  $BM$  такую точку  $X$ , что  $S(ABX) > S(CBX)$ , то из теоремы 11 получим искомое утверждение.

Проведем среднюю линию в треугольнике  $ABC$ , которая пересекает медиану в точке  $K$ . Возьмем на отрезке  $BT_1$  точку  $N$  так, чтобы  $BK = KN$ . Возможны два случая.

1. Точка  $N$  лежит на отрезке  $KM$ . Обозначим через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  острые углы четырехугольников Саккери, присоединенных соответственно к треугольникам  $ABC$  и  $ABM$ . Так как  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то

$$\begin{aligned} S(ABC) - 2S(ABM) &= \\ &= (\pi - 2\sigma_1) - 2(\pi - 2\sigma_2) = 2(2\sigma_2 - \sigma_1) - \pi < \\ &< 2\sigma_2 - \pi < 0. \end{aligned}$$

Значит,  $S(ABM) > S(BCM)$  и можно взять  $X = M$ .

2. Точка  $N$  лежит на отрезке  $MT_1$ . Тогда  $AN > CN$  и по формуле (2) получаем, что

$$\frac{\sin \frac{S(ABN)}{2}}{\sin \frac{S(BCN)}{2}} = \frac{\operatorname{th} AN}{\operatorname{th} CN} > 1, \quad \text{откуда } S(ABN) > S(BCN).$$

Можно взять  $X = N$ .

**СЛЕДСТВИЕ.** Трисектор и точка пересечения бисекционных отрезков в неравностороннем треугольнике не совпадают с точкой пересечения медиан.

## 7. ОБОБЩЕНИЕ

С помощью  $\Sigma$  можно обобщить теоремы о пересечении бисекционных отрезков и медиан в треугольнике.

**ТЕОРЕМА 14.** Если на  $\Sigma_A$ ,  $\Sigma_B$  и  $\Sigma_C$  в треугольнике  $ABC$  отметить точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , такие, что  $S(ABB_1) = S(BCC_1) = S(CAA_1)$ , то прямые  $(AA_1)$ ,  $(BB_1)$  и  $(CC_1)$  пересекутся в одной точке.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть дан произвольный треугольник  $ABC$  и проведены  $\Sigma_A$ ,  $\Sigma_B$  и  $\Sigma_C$ . Возьмем произвольную точку  $B_1 \in \Sigma_B$ . Введем следующие обозначения:  $AB = 2a$ ,  $BC = 2b$ ,  $\angle ABB_1 = \alpha$ ,  $\angle CBB_1 = B - \alpha$ ,  $S(ABB_1) = S(CBB_1) = \pi - 2\sigma$ . Проведем средние линии  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в треугольниках  $ABB_1$  и  $CBB_1$ , параллельные  $BB_1$  и пересекающие сторону  $AB$  в точке  $K$ , а сторону  $BC$  — в точке  $L$  (рис. 8). Опустим на них перпендикуляры  $BH_1$  и  $BH_2$ , тогда по формуле (2) и по формулам тригонометрии в треугольниках  $BKH_1$  и  $BLH_2$  получаем следующие равенства:

$$\cos(\sigma - \alpha) \operatorname{th} a = \operatorname{th} BH_1 = \operatorname{th} BH_2 = \cos(\sigma - (B - \alpha)) \operatorname{th} b.$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin(\sigma - B) \operatorname{th} b + \sin \sigma \operatorname{th} a}{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} b - \cos \sigma \operatorname{th} a},$$

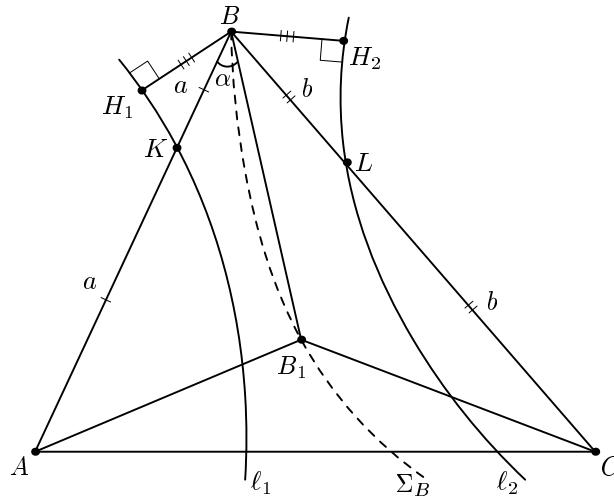


Рис. 8.

значит,

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} a - \cos \sigma \operatorname{th} b}{\cos(\sigma - B) \operatorname{th} b - \cos \sigma \operatorname{th} a}.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{M_1 \operatorname{ctg} \sigma + N_1}{M'_1 \operatorname{ctg} \sigma + N'_1}.$$

Аналогичные равенства верны и для двух других углов треугольника. Перемножим три полученных выражения, тогда получается равенство

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(C - \beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(A - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где  $x = \operatorname{ctg} \sigma$  и  $\deg f = \deg g = 3$ . Нам нужно доказать, что  $f \equiv g$ . Но мы знаем, что  $f = g$  при четырех различных  $\sigma$  (они соответствуют случаям трисектора, бисекционных отрезков, медиан и касательных, проведенных в вершинах, т. е. когда  $\sigma = \pi/2$ ), а значит, для любого  $\sigma$

$$\frac{\sin(B - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(C - \beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(A - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

и по теореме Чебы получаем требуемое.

### ЗАДАЧИ

1. Рассчитайте длину бисекционного отрезка, считая углы треугольника известными.

2. Рассчитайте, в каком отношении бисекционный отрезок делит сторону треугольника.
3. Рассчитайте, в каком отношении бисекционный отрезок делится точкой пересечения бисекционных отрезков.
4. Пользуясь леммой 2 (с. 120), докажите, что бисекционный отрезок в общем случае лежит между медианой и биссектрисой треугольника.
5. Докажите, что вне треугольника  $ABC$  существуют такие точки  $T_1, T_2, T_3$ , что площади треугольников  $ABC, ABT_1, ACT_1, BCT_1, ABT_2, ACT_2, BCT_2, ABT_3, ACT_3$  и  $BCT_3$  равны.
6. Докажите, что кривая  $\Sigma$  в общем случае не является ни прямой, ни окружностью, ни эквидистантой, ни орициклом.
7. Пусть  $\Omega$  — это геометрическое место точек, из которых две стороны треугольника видны под равными углами. Докажите, что  $\Omega$  лежит между высотой и  $\Sigma$ .
8. Докажите, что ни трисектор, ни точка пересечения бисекционных отрезков не совпадают с точкой Торичелли.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Атанасян Л. С. *Геометрия Лобачевского*. М.: Просвещение, 2001.
- [2] Гальперин Г. А. *Бильярдная формула для измерения расстояний на плоскости Лобачевского* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 8, 2004. С. 93–112.
- [3] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. М.: Физматлит, 2003.
- [4] Норден А. П. *Введение в геометрию Лобачевского*. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [5] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского*. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

---

П. В. Бибииков, механико-математический факультет МГУ  
email: tsdtp4u@proc.ru

И. В. Ткаченко, ФУПМ МФТИ  
email: ilyatk@yandex.ru