Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко «О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского»

О. В. Шварцман

1. О треугольниках с данным основанием AB и заданной площадью S

Все рассмотрения проведем в единичном диске Пуанкаре $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим в единичном диске отрезок AB (рис. 1). Пусть A' и B' — инверсные образы точек A и B при инверсии inv_S относительно единичной окружности $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

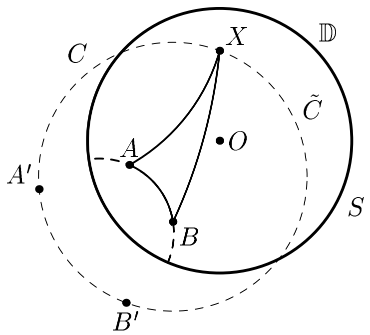

Рис. 1.

Лемма. *Пусть C — любая окружность, проходящая через точки A' и B' и пересекающая диск $\mathbb{D}$ по дуге $\tilde{C} = D \cap C$. Тогда для всех точек X дуги $\tilde{C}$ площадь гиперболического треугольника AXB принимает одно и то же значение.*

Доказательство. Любое движение t гиперболического диска $\mathbb{D}$ продолжается до преобразования $\hat{t} \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, которое а) сохраняет окружность S, б) переводит окружности расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$ в окружности.

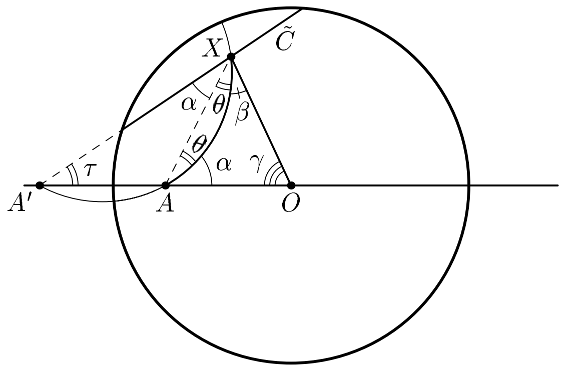

Рис. 2.

Из свойства а) следует, в частности, что $\hat{t} \circ \mathrm{inv}_S = \mathrm{inv}_S \circ \hat{t}$. Поэтому, применив подходящее движение t, можно считать, что точка B совпадает с центром диска, а точка A лежит на вещественной оси. Поскольку $\mathrm{inv}_S(0) = \infty$, то по свойству б) «дуга» $\tilde{C}$ будет хордой диска — пересечением прямой, проходящей через точку A' с окружностью S, см. рис. 2. Рассмотрим гиперболический треугольник AXO, в котором стороны OX и OA есть отрезки прямых, а сторона AX представляет собой дугу окружности T, проведенной через точки A', A и X. Докажем, что сумма углов α, β и γ в треугольнике AXO не зависит от положения точки X на «дуге» $\tilde{C}$. С этой целью проведем хорду AX окружности T и обозначим θ равные углы, которые эта хорда образует с окружностью T (см. рис. 2). Из (евклидовых) теорем о вписанном угле и угле между касательной и хордой следует, что $\theta = \tau$. Угол τ не зависит от положения точки X. Таким образом, $\alpha + \beta + \gamma + 2\tau = \pi$, т. е. гиперболическая площадь треугольника AXO равна $\pi - \alpha - \beta - \gamma = 2\tau$ и не зависит от положения точки X. □

Кажется, что такой прямой взгляд на происходящее и элементарнее, и проще. По ходу дела мы инвариантно охарактеризовали линии уровня функции

$$S(X) = \text{площадь треугольника } AXO$$

как след пучка окружностей через точки A', B' в диске $\mathbb{D}$. Это бывает полезно при решении разного рода «гиперболических» задач на экстремумы.

Теперь уже легко показать, что в гиперболическом треугольнике ABC существует единственная точка O такая, что площади треугольников OAB, OBC, OAC равны. В самом деле, пусть K — такая точка на стороне AB, что площадь треугольника AKC равна одной трети площади

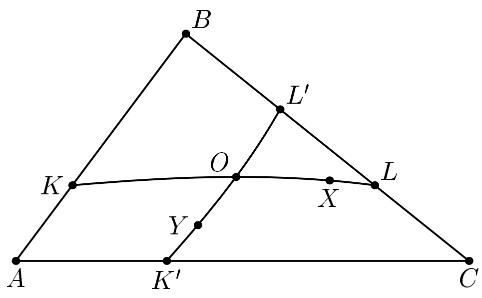

Рис. 3.

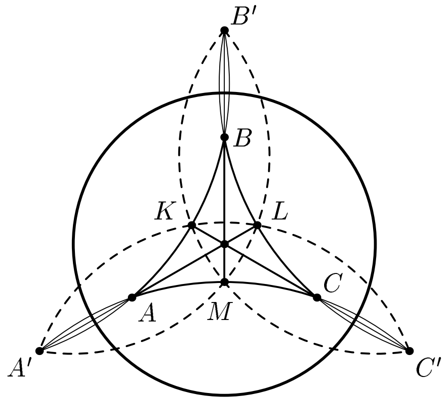

Рис. 4.

исходного треугольника (существование такой точки следует, например, из соображений непрерывности). Аналогично, на стороне BC выбирается точка L так, что $S_{ALC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Согласно лемме через точки K и L проходит единственная линия уровня функции $S(X) = S_{AXC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Искомая точка O является единственной точкой пересечения линии уровня $S(X)$ и аналогичной линии уровня $S(Y) = S_{AYB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, пересекающей стороны AC и BC в точках K' и L' соответственно (см. рис. 3).

2. О бисекторах площади

Назовем бисектором площади прямую, проходящую через вершину треугольника и делящую его площадь пополам.

Теорема (И. Ткаченко, [1, теорема 10, с. 121]). *Три бисектора в треугольнике* (*евклидовом, сферическом или гиперболическом*) *пересекаются в одной точке.*

Рассмотрим гиперболический треугольник ABC в диске Пуанкаре $\mathbb{D}$ и пусть K, L, M — точки, в которых бисекторы пересекают стороны AB, BC и CA соответственно. Мы сохраняем обозначения A', B' и C' из предыдущего раздела для точек, инверсных точкам A, B и C относительно граничной окружности S диска $\mathbb{D}$. Требуется доказать, что бисекторы пересекаются в одной точке. В рассматриваемой модели это эквивалентно следующему утверждению (см. рис. 4): дуга KC' окружности S_K, проходящей через точки K, C, C', дуга $B'M$ окружности S_M, проходящей через точки M, B, B' и дуга $A'L$ окружности S_L, проходящей через точки

L, A, A', пересекаются в одной точке. Если обозначить через O точку пересечения двух бисекторов, то без потери общности можно считать, что O — центр диска $\mathbb{D}$ (почему?). Рассматриваемые дуги превращаются при этом в общие хорды трех окружностей, о которых идет речь в следующем утверждении.

Утверждение [2, задача 116]. *Даны три круга, все пересекающиеся между собой. Тогда три общие хорды каждых двух из трех окружностей пересекаются в одной точке* (*рис.* 5).

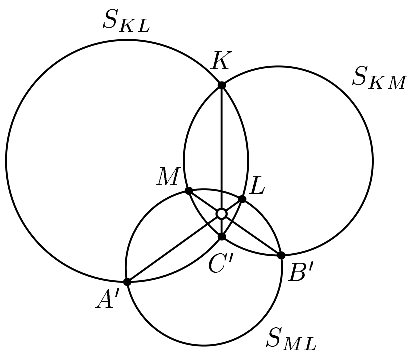

Рис. 5.

Давайте поймем, к каким трем кругам нужно применить это утверждение. Для этого нужно заметить, что по лемме существует единственная окружность S_{KL} (соответственно, S_{LM} и S_{MK}), проходящая через точки A', K, L, C' (соответственно, точки B', B, C, C' и A', A, C, C'). Это окружность, содержащая геометрическое место точек X, таких что $S(X) = S_{AXC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Пусть D_{KL} (соответственно, D_{KM}, D_{ML}) — круг, ограниченный окружностью S_{KL}. Теорема о бисекторах есть прямое следствие нашего утверждения, примененного к кругам D_{KL}, D_{KM}, D_{ML} (см. рис. 5).

Список литературы

[1] Бибиков П. В., Ткаченко И. В. *О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2005. С. 113–126.

[2] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия* (*планиметрия*). М.: ГТТИ, 1952.

О. В. Шварцман, ВКМ НМУ