Об одноцветных связных графах

К. А. Матвеев

В книге В. А. Садовничего, А. А. Григорьяна и С. В. Конягина «Задачи студенческих математических олимпиад» приведена следующая задача.

> Задача. Все ребра полного графа на n вершинах покрашены в 3 цвета. Докажите, что можно выбрать в нем связный подграф, содержащий не менее $n/2$ вершин, все ребра которого покрашены в один цвет (в дальнейшем подграфы, удовлетворяющие этому условию, будем называть одноцветными).

Основная цель настоящей заметки состоит в обобщении этого факта, а именно в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Все рёбра полного графа на n вершинах покрашены в k цветов. Тогда в нём существует связный одноцветный подграф, в котором не менее $n/(k-1)$ вершин.*

При $k = 3$ — это утверждение вышеприведенной задачи, а при $k = 2$ — тот факт, что дополнение несвязного графа связно.

Попутно будут доказаны также некоторые факты, имеющие интерес и сами по себе. Будет также показано, что существует бесконечно много значений k, для которых при некоторых n оценка является точной.

Лемма 1 (неравенство). *Неотрицательные действительные числа a, b, c, $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ таковы, что $x_1 + \cdots + x_m \leqslant b$, $y_1 + \ldots + y_m \leqslant c$ и $x_i + y_i \leqslant a$ при любом $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда*

$$x_1y_1 + \cdots + x_my_m \leqslant \frac{abc}{b+c}.$$

Доказательство. Докажем вначале такое неравенство:

$$p_1q_1 + \cdots + p_mq_m \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} (\lambda p_i + (1-\lambda)q_i), \qquad (1)$$

при $p_i, q_i > 0$, $\sum_i p_i \leqslant 1$, $\sum_i q_i \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Заметим, что функция $1/x$ является выпуклой при $x > 0$, т.е. для $z, t > 0$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполнено $1/(\lambda z + (1-\lambda)t) \leqslant \lambda/z + (1-\lambda)/t$. Тогда

$$\frac{\sum_i p_i q_i}{\max_i(\lambda p_i + (1-\lambda)q_i)} \leqslant \sum_i \frac{p_i q_i}{\lambda p_i + (1-\lambda)q_i} = \sum_i \frac{1}{\lambda q_i^{-1} + (1-\lambda)p_i^{-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \sum_i q_i + (1-\lambda)\sum_i p_i \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Вернемся к исходному неравенству и выкинем все пары x_i и y_i, для которых $x_i y_i = 0$, потому что они не влияют на левую часть, а все условия будут выполняться. Если хотя бы одно из чисел b и c равно 0, то неравенство очевидно, поэтому будем считать, что они оба больше 0. Тогда положим $p_i = x_i/b$, $q_i = y_i/c$, $\lambda = b/(b+c)$. Имеем

$$\sum_i x_i y_i = bc \sum_i p_i q_i \leqslant$$
$$\leqslant bc \cdot \max_i \left(\frac{b}{b+c} \cdot \frac{x_i}{b} + \frac{c}{b+c} \cdot \frac{y_i}{c} \right) = \frac{bc}{b+c} \cdot \max_i (x_i + y_i) \leqslant \frac{abc}{b+c}.$$

Лемма 2. *Все ребра n-вершинного графа G покрашены в k цветов. Пусть a_i — максимально возможное число вершин в связном подграфе H графа G, в котором все ребра покрашены в цвет i. Тогда, если дополнение графа G несвязно, то $a_1 + \dots + a_k \geqslant n$.*

Доказательство. Пусть дополнение графа G распадается на компоненты связности $C_1, \ldots, C_s$ $(s \geqslant 2)$. Отнесем все вершины C_1 к множеству A, а все вершины компонент $C_2, \ldots, C_s$ к множеству B. Тогда в графе G есть все ребра, соединяющие любую вершину из A и любую вершину из B. Соответствующий полный двудольный граф назовем F, он является подграфом графа G. Пусть в множествах A и B соответственно l и $n-l$ вершин. Пусть максимально возможное число вершин в связном подграфе графа F, в котором все ребра покрашены в цвет i, равно b_i. Очевидно, что $b_i \leqslant a_i$. Поэтому достаточно доказать, что $b_1 + \dots + b_k \geqslant n$. Пусть количество ребер цвета i в графе F равно $\alpha_i l(n-l)$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$. Проведем между вершинами графа F только ребра цвета i и обозначим полученный граф F_i. Пусть он распадается на компоненты связности $P_1, \ldots, P_t$. При этом P_j содержит x_j вершин из множества A и y_j вершин из множества B. Тогда число ребер в графе F_i не превосходит $x_1 y_1 + \dots + x_t y_t$. Но $x_j + y_j \leqslant b_i$ при $1 \leqslant j \leqslant t$. Значит, по лемме 1 $\alpha_i l(n-l) \leqslant x_1 y_1 + \dots + x_t y_t \leqslant b_i l(n-l)/n$. Следовательно, $b_i \geqslant n\alpha_i$. Просуммировав по всем i, получаем $b_1 + \dots + b_k \geqslant n(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) = n$. Отсюда, в частности, следует, что (при некотором i) $a_i \geqslant n/k$. То есть в графе можно выбрать одноцветный связный подграф, содержащий не менее n/k вершин.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Выберем в нашем полном графе максимальный по числу вершин связный одноцветный подграф

H (будем для определенности считать, что все его ребра покрашены в цвет 1). Пусть A — множество его вершин, B — множество оставшихся вершин. Если B пусто, то выбранный подграф содержит $n \geqslant n/(k-1)$ вершин. Если нет, то рассмотрим все ребра, соединяющие вершины из A и вершины из B (образованный ими граф назовем G). Они все покрашены в оставшиеся $k-1$ цветов, так как наличие среди них ребер цвета 1 противоречило бы максимальности подграфа H (к нему, например, можно было бы присоединить это ребро, увеличив число вершин). Тогда по лемме 2 в графе G можно выбрать одноцветный связный подграф, содержащий не менее $n/(k-1)$ вершин, который будет таковым и для исходного графа.

Теперь покажем, что оценка, полученная в теореме 1, будет в некоторых случаях точной.

Теорема 2. *Если $k-1=p$ — простое число, и n делится на $(k-1)^2$, то оценка из теоремы 1 точная.*

Доказательство. Пусть $n/(k-1)^2 = d$. Разобьем все вершины полного n-вершинного графа на p^2 множеств вида $A_{i,j}$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1$, $0 \leqslant j \leqslant p-1)$, содержащих по d вершин каждое. Если ребро соединяет две вершины, лежащие в одном из этих множеств, то покрасим его в цвет 1. Все ребра, соединяющие вершины из множеств $A_{i',j'}$ и $A_{i'',j''}$, покрасим в один цвет, который определим следующим образом. Если $i'=i''$, то покрасим их в цвет 1. Если $i' \neq i''$, то существует единственное такое $0 \leqslant t \leqslant p-1$, что $(j''-j') \equiv t(i''-i') \pmod p$. Тогда покрасим эти ребра в цвет $t+2$. Пусть B_i есть объединение множеств $A_{i,0}, \ldots, A_{i,p-1}$. Пусть H — некоторый одноцветный связный подграф. Если все его ребра покрашены в цвет 1, то все его вершины принадлежат одному из множеств B_i, то есть у него не более n/p вершин. Пусть все его ребра покрашены в цвет $t \neq 1$. Выберем в нем произвольную вершину X. Пусть она принадлежит множеству $A_{i'j'}$. Тогда, двигаясь из нее по ребрам цвета t, можно в каждом из множеств B_i посетить только вершины одного множества $A_{ij''}$ (а именно, для такого $0 \leqslant j'' \leqslant p-1$, что $j'' \equiv (t-2)(i-i')+j' \pmod p$). Значит, и в этом случае подграф H содержит не более n/p вершин.

Автор благодарен А. С. Штерну за плодотворные обсуждения и М. Н. Вялому, предложившему более простое по сравнению с первоначальным доказательство леммы 1.

К. А. Матвеев, лицей №66, г. Омск
Email: `komatveev@yandex.ru`

Издательство МЦНМО

Д. В. Аносов. **От Ньютона к Кеплеру.** 2006. 272 с.

В книге рассказывается, как можно объяснить законы Кеплера движения планет на основе законов механики.

Б. П. Гейдман, Т. В. Ивакина, И. Э. Мишарина. **Математика. 4 класс.** Учебник для четвертого класса начальной школы. 1-е полугодие 2006. 120 с. 2-е полугодие 2006. 120 с.

Б. П. Гейдман, И. Э. Мишарина. **Методические рекомендации по работе с комплектом учебников «Математика. 4 класс».** 2006. 116 с.

Глобус. Общематематический семинар. Выпуск 3. Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. 2006. 164 с.

Цель семинара «Глобус» — по возможности восстановить единство математики. Семинар рассчитан на математиков всех специальностей, аспирантов и студентов. Третий выпуск включает доклады С.Алескера, В.М.Бухштабера, П.Делиня, С.Б.Каток, А.Н.Паршина, А.Б.Сосинского, А.Г.Хованского, М.А.Цфасмана, С.Б.Шлосмана.

Э. Г. Готман. **Стереометрические задачи и методы их решения.** 2006. 160 с.

Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986–2005. Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты. 2006. 616 с.

Колмогоров в воспоминаниях учеников. Сборник статей. Редактор-составитель А. Н. Ширяев. 2006. 472 с.

Московские математические олимпиады 1993–2005 г. Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Ященко. Под ред. В. М. Тихомирова. 2006. 456 с.

Книга будет интересна всем любителям красивых математических задач.

Я. Б. Песин. **Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности.** Пер. с англ. под ред. Ю. С. Ильяшенко. 2006. 144 с.

Книга является введением в современную теорию частичной гиперболичности. Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

Я. П. Понарин. **Элементарная геометрия. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства.** 2006. 256 с.

Т. Рат, Д. О. Клифтон. **Позитивные стратегии для работы и жизни. Зачем и как наполнять Вёдра?** Пер. с англ. Н. А. Шиховой. 2006. 104 с.

Словарь криптографических терминов. Под ред. Б.А. Погорелова и В.Н. Сачкова. 2006. 94 с.

А. Я. Хинчин. **Избранные труды по теории чисел.** 2006. XX + 260 с.

А.Г. Хованский, С.П. Чулков. **Геометрия полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Приложения к комбинаторике, алгебре и дифференциальным уравнениям.** 2006. 128 с.

18 × 18. Вступительные задачи ФМШ при МГУ. Составители Н. Б. Алфутова, Ю. Е. Егоров, А. В. Устинов. 2006. 160 с.

XI Турнир математических боёв им. А. П. Савина. 2006. 96 с.

XXVIII Турнир им. М. В. Ломоносова 25 сентября 2005 года. Задания, решения, комментарии. Сост. А. К. Кулыгин. 2006. 142 с.