По мотивам задачника «Математического просвещения»

Дискретные положительные гармонические функции

С. Г. Слободник

Предлагается новое, более короткое, решение задачи 5.9б) из задачника «Математического просвещения».

Гармонической на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$ называется такая функция $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, значение которой в каждой точке равно среднему арифметическому от значений соседей:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_1,\ldots,x_i-1,\ldots,x_n)+f(x_1,\ldots,x_i+1,\ldots,x_n)\Big).$$

Теорема. *Гармоническая на* $\mathbb{Z}^n$ *положительная функция постоянна.*

Частными случаями этой теоремы являются пункты б) и в) задачи 5.9 из задачника «Математического просвещения». В предыдущем выпуске «Математического просвещения» было опубликовано доказательство этой теоремы [1]. Здесь мы изложим более простое доказательство.

Для обозначения точек решетки $\mathbb{Z}^n$ будем использовать малые латинские буквы или записанные в скобках координаты соответствующих точек. Через e_k будем обозначать точку с координатами $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где единица стоит на k-м месте. Точку с нулевыми координатами будем для краткости обозначать через 0.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 11, 2007(145–148)

Точки решетки можно складывать покомпонентно. В таких обозначениях условие гармоничности переписывается как

$$f(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x+e_i) + f(x-e_i) \big). \tag{1}$$

Рассмотрим множество F гармонических на $\mathbb{Z}^n$ функций, таких что

$$f(x) > 0, \quad \text{для любого } x \in \mathbb{Z}^n, \tag{2}$$

$$f(0) = 1 \quad \text{(условие нормировки)}. \tag{3}$$

Множество F непусто, так как оно содержит тождественно равную 1 функцию u. Если $f(x)$ — гармоническая на $\mathbb{Z}^n$ положительная функция, то $f(x)/f(0) \in F$. Мы докажем теорему, установив, что множество функций F не содержит никаких других функций, кроме u.

План доказательства таков. Мы введем линейный порядок на функциях из $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}$ и покажем, что максимальная (и минимальная) относительно этого порядка функции в F должны быть константами. Существование максимальной (равно как и минимальной) функции следует из компактности F в топологии поточечной сходимости. Мы приведём элементарное доказательство этого факта, не использующее теорему Тихонова.

На этом доказательство теоремы завершается: максимальный элемент равен минимальному, поэтому в множестве F есть только одна функция u.

Начнём со вспомогательного замечания: положительные гармонические функции не могут расти очень быстро. А именно, введем обозначение

$$|x-y| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \tag{4}$$

Тогда справедлива простая оценка роста положительной гармонической функции.

Лемма 1. *Если f — гармоническая на $\mathbb{Z}^n$ положительная функция, то для любых $x, y \in \mathbb{Z}^n$ выполнено*

$$f(y) < f(x)(2n)^{|x-y|}. \tag{5}$$

Доказательство. Для случая $y = x + e_k$ неравенство (5) немедленно следует из условий гармоничности и положительности:

$$2nf(x) = f(y) + \langle \text{положительные слагаемые} \rangle > f(y).$$

Осталось заметить, что за $|x-y|$ единичных шагов по решетке $\mathbb{Z}^n$ можно перейти из x в y. $\square$

Сравнивая при помощи (5) значение $f(x)$ с $f(0) = 1$, получаем

Следствие 1. *Если* $f \in F$, *то* $(2n)^{-|x|} < f(x) < (2n)^{|x|}$.

Так как множество $\mathbb{Z}^n$ счетно, то существует биективное отображение

$$\varphi \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}$$

множества $\mathbb{Z}^n$ на множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Через a_k будем обозначать такую точку решетки x, для которой $\varphi(x) = k$.

После того как мы занумеровали точки решетки, на функциях из $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}$ возникает лексикографический порядок: $f \prec g$ тогда и только тогда, когда $f(a_k) < g(a_k)$ при некотором k, а на всех меньших точках функции равны $f(a_i) = g(a_i)$ при $i < k$.

Лемма 2. *Если в множестве* F *относительно лексикографического порядка существуют наибольшая функция* M *и наименьшая функция* m, то $M = m = u$.

Доказательство. Для $f \in F$ определим функции $S_i f$:

$$S_i f(x) = f(x) f(e_i) - f(x + e_i) f(0) \quad \text{для любого } x \in \mathbb{Z}^n. \tag{6}$$

Функция $S_i f$ гармоническая, так как является линейной комбинацией гармонических функций $f(x)$ и $f(x + e_i)$. При этом $S_i f(0) = 0$.

Из оценки роста (5) получаем, что

$$|S_i f(x)| \leqslant |f(x)| \cdot |f(e_i)| + |f(x + e_i)| < 4n |f(x)| \,. \tag{7}$$

Поэтому функции $f \pm (4n)^{-1} S_i f$ также принадлежат F.

Если $S_i f$ не равно тождественно 0, то f лежит строго между $f + (4n)^{-1} S_i f$ и $f - (4n)^{-1} S_i f$ в лексикографическом порядке. Отсюда заключаем, что для максимальной и минимальной функций должны выполняться равенства $S_i M = S_i m = 0$.

Теперь докажем, что если $S_i f = 0$ для любого i, то $f = u$. Из равенств

$$S_i f(x) = f(x) f(e_i) - f(x + e_i) f(0) = 0 \tag{8}$$

следует

$$f(x + e_i) = \frac{f(e_i)}{f(0)} f(x) = f(e_i) f(x). \tag{9}$$

Подставив в (9) вместо x вектор $x - e_i$, получим

$$f(x - e_i) = f(e_i)^{-1} f(x). \tag{10}$$

Условие гармоничности в 0 с учётом равенств (9) и (10) приобретает вид

$$2n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(e_i) + f(e_i)^{-1} \right). \tag{11}$$

Так как для положительного числа a сумма $a + a^{-1}$ не меньше 2 и равна 2 только если $a = 1$, то из (11) следует, что $f(e_i) = 1$. Но тогда из (9) и (10) следует, что в соседних точках решетки функция f принимает одинаковые значения. Поэтому она тождественно равна 1. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в существовании наибольшей и наименьшей функции в F.

Лемма 3. *Множество F замкнуто относительно поточечной сходимости: если $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$ и $f^n \in F$, то $g \in F$.*

Доказательство. Положительность предельной функции следует из оценки (5):

$$(2n)^{|x|} g(x) = (2n)^{|x|} \lim_{n\to\infty} f^n(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} f^n(0) = 1.$$

Условия гармоничности и нормировки — равенства и потому сохраняются при предельном переходе. $\square$

Лемма 4. *В множестве F относительно лексикографического порядка существуют наибольшая и наименьшая функции.*

Доказательство. Докажем существование максимума, существование минимума доказывается аналогично.

Следствие 1 из неравенства роста (5) показывает, что множество значений функций из F в любой точке ограничено. Воспользуемся нумерацией φ точек $\mathbb{Z}^n$. Построим семейство вложенных замкнутых множеств F_i и последовательность чисел c_i по следующему правилу:

$$F_0 = F, \quad F_i = \{f \mid f \in F_{i-1},\ f(a_i) = c_i\}, \quad c_i = \sup_{f\in F_{i-1}} f(a_i).$$

Замкнутость множеств F_i доказывается аналогично лемме 3. Поэтому ни одно из множеств F_i не пусто, а функция M такая, что $M(a_k) = c_k$, принадлежит всем множествам F_i. С другой стороны, любая функция из $F = F_0$ не больше M по построению. $\square$

Список литературы

[1] Шольце П. *О неотрицательных гармонических функциях на решетке* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 10. 2005. С. 236–242.

С. Г. Слободник, Московский институт открытого образования
Email: sam-slob@mail.ru