Решения задач из предыдущих выпусков

6.7. Условие. Пусть G — бесконечный ориентированный граф, $V(n)$ — число вершин, в которые можно попасть из фиксированной вершины O не более чем за n шагов. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} V(n)/n^2 = 0$, то найдется вершина графа, в которую входит не меньше стрелок, чем выходит.

Решение. В условии задачи не было сказано, но предполагалось, что в графе нет кратных стрелок (рёбер). В противном случае утверждение задачи по очевидным причинам ложно.

Назовём *шаром* $B_r(O)$ *радиуса* r с *центром* в точке O множество вершин, в которые можно попасть из вершины O не более чем за r шагов по стрелкам графа. *Сферой* $S_r(O)$ *радиуса* r с *центром* в точке O назовём множество вершин графа, в которые можно попасть за r шагов, но нельзя попасть за меньшее число шагов.

Ясно, что $S_r(O) = B_r(O) \setminus B_{r-1}(O)$, а $V(r) = |B_r(O)|$, $|M|$ обозначает число элементов множества M. Положим $T_r(O) = |S_r(O)| = V(r) - V(r-1)$.

Теперь предположим, что из каждой вершины выходит больше стрелок, чем входит, и придём к противоречию.

Лемма 1. *Количество стрелок, выходящих из вершин шара $B_r(O)$ и заканчивающихся в вершинах вне шара $B_r(O)$, не меньше $|B_r(O)|$.*

Доказательство. Подсчитаем разность между количеством входящих и выходящих стрелок для каждой вершины $B_r(O)$ и сложим эти числа. По сделанному предположению результат S не меньше $|B_r(O)|$. Каждая стрелка, соединяющая вершины шара даёт нулевой вклад в сумму. Положительный вклад (равный 1) дают стрелки, выходящие из вершин шара в вершины вне шара.

Лемма 2. $V(r) \leqslant T(r) \cdot T(r+1)$.

Доказательство. Стрелки, ведущие из $B_r(O)$ наружу, начинаются в вершинах $S_r(O)$ и заканчиваются в вершинах $S_{r+1}(O)$. Каждая пара вершин соединена не более чем одной стрелкой, поэтому количество стрелок не больше $T(r) \cdot T(r+1)$. Осталось воспользоваться предыдущей леммой.

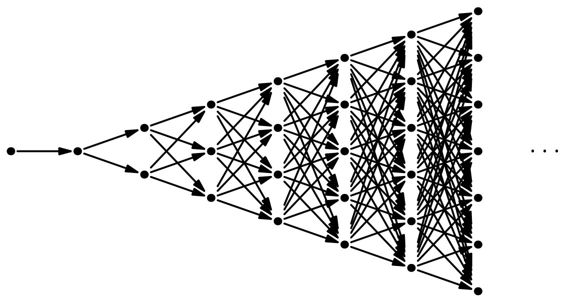

Рис. 1.

Применяя неравенство Коши $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$, лемму 2, и очевидное неравенство $V(r) \geqslant V(r-1)$, получаем

$$V(r+1) - V(r-1) \geqslant 2\sqrt{(V(r+1)-V(r))(V(r)-V(r-1))} \geqslant \\ \geqslant 2\sqrt{V(r)} \geqslant 2\sqrt{V(r-1)}.$$

Последовательность $s_n = V_{2n}, \geqslant 0$ удовлетворяет условиям

$$s_0 = 1, \quad s_{n+1} \geqslant s_n + 2\sqrt{s_n}.$$

Отсюда по индукции получаем оценку $s_n \geqslant n^2/2$, значит, $V(r) \geqslant (r-1)^2/2$. Приходим к противоречию с условием задачи.

Замечание. На рис. 1 приведен пример графа, у которого из каждой вершины выходит больше стрелок, чем входит, а объём шара $V(r) = r(r+1)/2$, так что оценка в задаче асимптотически точна. Более того, можно показать, что если $V(r) < r(r+1)/2$, при некотором r, то найдется вершина, в которую входит не меньше стрелок, чем выходит. Если же для любого C при всех достаточно больших r выполняется неравенство $V(r) < r^2/2 - Cr$, то число таких вершин бесконечно. В то же время, для фиксированного C существует граф с конечным числом вершин, в которые входит не меньше стрелок, чем выходит, и такой, что $V(r) < r^2/2 - Cr$.

(А. Я. Белов)

7.12. Условие. Могут ли 4 квадрата натуральных чисел образовывать арифметическую прогрессию?

Комментарий. Эту задачу сформулировал П. Ферма в одном из своих писем к Мерсенну (предположительно в 1641 году). Решение он не приводит. Впоследствии задача была решена многими математиками. В изложенном ниже рассуждении используются идеи Л. Эйлера (из его записных книжек).

Ответ: не могут.

Решение. Предположим противное: найдутся натуральные числа $x < a < b < y$, квадраты которых образуют арифметическую прогрессию.

Имеем тогда: $b^2 - x^2 = y^2 - a^2$, откуда

$$\frac{b+x}{y+a} = \frac{y-a}{b-x} = \frac{m}{n},$$

где $\frac{m}{n}$ — запись предыдущих (равных) дробей в виде несократимой дроби. Тогда найдутся такие натуральные s и t, что $b + x = sm$, $y + a = sn$ и $y - a = tm$, $b - x = tn$, откуда $x = \frac{sm - tn}{2}$, $a = \frac{sn - tm}{2}$, $b = \frac{sm + tn}{2}$.

По условию $b^2 - a^2 = a^2 - x^2$. Подставив в это равенство выражения x, a, b через m, n, s, t, преобразуем его к виду $(m^2 - n^2)(t^2 - s^2) = 2mnst$. Мы решим задачу, если будет доказана

Лемма 1. Не существует натуральных чисел m, n, s, t, удовлетворяющих равенству $(m^2 - n^2)(t^2 - s^2) = 2mnst$.

Доказательство леммы 1. Предположим противное: такие числа найдутся. Если s и t имеют общий делитель, можно поделить равенство на квадрат этого делителя и получить аналогичное равенство. Поэтому будем считать, что s и t взаимно просты, и аналогично m и n взаимно просты. Очевидно также, что $m \neq n$, $s \neq t$.

Заметим, что не могут быть одновременно m и n разной четности и s и t разной четности (иначе левая часть равенства нечетна, а правая четна). Пусть, например, s и t одной четности (а значит нечетны).

Поделив равенство на n^2, получим относительно $\frac{m}{n}$ квадратное уравнение:

$$\left(\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1\right)(t^2 - s^2) = 2st\frac{m}{n}.$$

Дискриминант этого уравнения равен $4(s^4 - s^2t^2 + t^4)$ и должен быть квадратом рационального числа, откуда (так как s и t целые) $s^4 - s^2t^2 + t^4$ — квадрат целого числа.

Осталось доказать, что справедлива

Лемма 2. Если нечетные натуральные числа s и t различны, число $s^4 - s^2t^2 + t^4$ не может быть квадратом целого числа.

Доказательство леммы 2.

Предположим противное. Возьмем тогда такие натуральные s, t и целое $z \geqslant 0$, что $s^4 - s^2t^2 + t^4 = z^2$ и сумма $s^2 + t^2$ наименьшая возможная.

Числа s и t взаимно просты (иначе есть аналогичное равенство для меньших чисел, чем s и t), а значит и z взаимно просто с s и с t.

По предположению $(s^2 - t^2)^2 = z^2 - (st)^2$, и так как $s \neq t$, получаем, что $(z + st)(z - st)$ — квадрат натурального числа. Найдем наибольший общий делитель четных чисел $z + st$ и $z - st$. Он делит сумму $2z$ и разность

$2st$ этих чисел, и, значит, равен 2. Значит, найдутся натуральные числа k и l такие, что $z + st = 2k^2$, $z - st = 2l^2$, откуда $z = k^2 + l^2$, $st = k^2 - l^2$.

Заметим, что число $3(st)^2+z^2$ равно $(s^2+t^2)^2$, то есть является квадратом натурального числа. Подставляя вместо z и st их выражения через k и l, получим, что квадратом является $3(k^2-l^2)^2+(k^2+l^2)^2 = 4(k^4-k^2l^2+l^4)$, а значит $k^4-k^2l^2+l^4$ тоже квадрат. Но $k^2+l^2 = z < s^2+t^2$ (очевидно, если возвести в квадрат), что противоречит выбору s и t. Лемма 2 доказана.

Замечание. Лемма 2 верна для любых различных натуральных чисел s и t, желающие могут найти доказательство самостоятельно.

Литература.

1. П. Ферма. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М.: Наука, 1992. С. 34.

2. Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел. СПб.: Наука, 1997. С. 99–102.

3. W. Sierpinski. Elementary theory of numbers. Monografie Matematyczne. Tom 42. Warszawa, 1964. C. 73–75. Электронная версия есть на сайте `http://matwbn.icm.edu.pl` (*С. А. Дориченко*)

8.9. Условие. Сфера раскрашена в 2 цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами.

Решение. Впишем в сферу икосаэдр и докажем, что найдется правильный треугольник на его вершинах, покрашенный в один цвет. Предположим противное и рассмотрим раскраску в красный и синий цвет, не содержащую одноцветных правильных треугольников.

Будем считать, что вершина A (см. рис. 1) покрашена в красный цвет. Диаметрально противоположную ей вершину обозначим A'. Икосаэдр состоит из правильных пятиугольных пирамид с вершинами в A и A' и правильной пятиугольной антипризмы между ними. Вершины, связанные ребрами с A, назовем верхним слоем, а связанные с A' — нижним слоем.

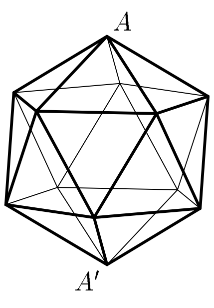

Рис. 1.

Заметим, что в верхнем слое нет пары соседних красных вершин (иначе они и A образуют правильный треугольник). Аналогично, в нижнем слое нет пары красных вершин, идущих через одну.

Значит, в каждом слое не больше двух красных вершин и не меньше трех синих. Но тогда A' — красная (иначе к ней можно было бы применить рассуждение, которое мы привели для A, и найти одноцветный правильный треугольник).

(Вершина A была выбрана произвольно, поэтому мы фактически доказали, что противоположные вершины икосаэдра покрашены одинаково.)

Но теперь оказывается, что в обоих слоях нет пары красных вершин (такая пара либо соседняя, либо расположена через одну). Значит, в верхнем слое есть три подряд идущие синие вершины S_1, V, S_2. Вершина V', противоположная V, также синяя (вершину A мы выбрали произвольно, поэтому мы фактически доказали, что противоположные вершины икосаэдра покрашены одинаково). Но тогда S_1, V', S_2 образуют правильный одноцветный треугольник.

Комментарий. Естественно поставить более общий вопрос: сфера раскрашена в несколько цветов. Верно ли что найдется правильный n-угольник с одноцветными вершинами? Ответ на этот вопрос (сферический аналог теоремы Ван дер Вардена) неизвестен даже для треугольника. Теорема Ван дер Вардена для афинного пространства звучит так: пространство раскрашено в несколько цветов. Тогда для любого конечного множества найдется подобное ему одноцветное. Теореме Ван дер Вардена для афинного пространства посвящена статья В. О. Бугаенко («Математическое просвещение», третья серия, выпуск 10, 2006. С. 151–160).

Неизвестен аналог теоремы Ван дер Вардена и для неевклидовой плоскости. (*А. Я. Белов*)

9.9. Условие. Сколько синтаксически правильных выражений из n символов можно составить, если использовать только символы двух переменных X и Y, открывающую (и закрывающую) скобки, запятую (,), символ двуместной функции g и символ одноместной функции f?

Синтаксически правильные выражения определяются индуктивно: X, Y — синтаксически правильные выражения, любое синтаксически правильное выражение имеет вид $f(A)$ или $g(A, B)$, где A, B — синтаксически правильные выражения меньшей длины.

Решение. Будем называть синтаксически правильные выражения *термами*.

Пусть T — множество всех термов. Тогда
$$T = f(T) \cup g(T, T) \cup \{X, Y\}. \tag{1}$$
Здесь $g(T, T)$ означает множество термов вида «символ g, открывающаяся скобка, произвольный терм, запятая, другой произвольный терм, закрывающая скобка». Аналогично определяется $f(T)$.

Если записать все термы по разу через знак объединения $\cup$, потом заменить $\cup$ на $+$, а символы f, g, ,, (,) на соответствующие коммутирующие переменные $x_f, x_g, x_,, x_(, x_)$, x_X, x_Y, то после группировки подобных членов получится выражение

$$\tau = \sum_{n_i=0}^{\infty} K_{n_1,\ldots,n_7} x_f^{n_1} x_g^{n_2} x_,^{n_3} x_(^{n_4} x_)^{n_5} x_X^{n_6} x_Y^{n_7}\,,$$

где $K_{n_1,\ldots,n_7}$ — число термов с n_1 вхождениями символа f, n_2 вхождениями символа g, n_3 вхождениями символа запятой, …, n_7 вхождениями Y. Такое выражение называется *производящей функцией.*

Равенство (1) в коммутирующих переменных превращается в уравнение

$$\tau = x_f x_(\tau x_) + x_g x_(\tau x_, \tau x_) + x_X + x_Y. \tag{2}$$

Сделав замену переменных $\bar f = x_f x_(x_)$; $\bar g = x_g x_(x_, x_)$, $\bar X = x_X$, $\bar Y = x_Y$, получим равенство

$$\tau = \bar f \tau + \bar g \tau^2 + \bar X + \bar Y. \tag{3}$$

Комбинаторный смысл замены в том, что символу f отвечает пара скобок, а символу g — пара скобок и запятая; если баланс не соблюдается, то таких термов нет. Отсюда

$$\tau = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(\bar X + \bar Y)\bar g/(1-\bar f)^2}}{2\bar g(1-\bar f)}\,.$$

Разложив это выражение в ряд Тейлора, можно вычислить коэффициенты. Для этого мы воспользуемся (для $\alpha = 1/2$) формулой бинома Ньютона

$$(1+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k,$$

где $\binom{\alpha}{k} = \alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - (k-1))/k!$. Имеем:

$$\tau = \sum_{k,l,n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} 2^{2n} \frac{(\bar X + \bar Y)^n \bar g^n}{(1-\bar f)^{2n}}\,.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{(1-y)^l} = \left(\frac{1}{(1-y)}\right)^{(l)} = A_l^k y^l,$$

($A_l^k = k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(l-1))$), $\varphi^{(l)}$ означает l-кратное дифференцирование). Получим

$$\tau = \sum_{n \geqslant m, k,l,m,n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} 2^{2n} A_{2k+1}^l \binom{n}{m} \bar f^k \bar g^n \bar X^m \bar Y^{n-m}\,.$$

Коэффициент

$$\binom{1/2}{n} 2^{2n} A_{2k+1}^l \binom{n}{m}$$

равен числу термов, содержащих m вхождений X, $n-m$ вхождений Y, k вхождений f и n вхождений g. В этом случае имеется ровно $k+n$ вхождений открывающих и $k+n$ закрывающих скобок, n запятых.

Поскольку нас интересует только общее число символов, сделаем замену $t^4 \to \bar{g}, t^3 \to \bar{f}, t \to \bar{X}, t \to \bar{Y}$ (показатели степени отвечают числу символов, например, $\bar{g}$ отвечает 4 символа g, (,), ,). Имеем

$$\tau' = \frac{1-\sqrt{1-4(t+t)t^4/(1-t^3)^2}}{2t^4(1-t^3)} = \frac{1-\sqrt{1-8t^5/(1-t^3)^2}}{2t^4(1-t^3)}\,.$$

Аналогично получаем

$$\tau' = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\binom{1/2}{k}2^{14k}t^{5k-4}}{(1-t^3)^{2k+1}}\,.$$

В силу равенства для разложения в ряд $\dfrac{1}{(1-y)^l}$ имеем

$$\tau' = \sum_{k,l=1}^{\infty}(-1)^k\binom{1/2}{k}2^{14k}t^{5k-4+3l}A^l_{2k+1}\,.$$

Отсюда следует, что количество термов, содержащих ровно m символов, равно

$$\sum_{k\geqslant 0, l\geqslant 0, 5k-4+3l=m}\left|\binom{1/2}{k}\right|2^{14k}A^l_{2k+1}\,.$$

Замечания. 1. Аналогичные формулы справедливы для случая термов, содержащих функциональные буквы от любого числа переменных. В этом случае производящая функция будет алгебраической функцией степени, равной максимальной валентности функциональной буквы. Ясно, что все коэффициенты ряда Тейлора получающейся алгебраической функции будут целыми числами. Для произвольной алгебраической функции количество простых чисел, входящих в знаменатели коэффициентов ряда Тейлора, будет конечным (как сообщил мне М. Концевич).

2. Имеется классическая задача о числе способов $T(n)$ правильно расставить скобки в неассоциативном слове из n символов. Ясно, что $T(1) = T(2) = 1$, $T(3) = 2$. Рассматривая закрывающую скобку, парную самой левой открывающей, получаем рекуррентное соотношение

$$T(n) = \sum_{k+l=n;k,l\geqslant 2}T(k)T(l).$$

Из него легко получить, что производящая функция $\tau = \sum_{k=1}^{\infty}T(k)t^k$ удовлетворяет уравнению $\tau^2-\tau+t=0$. Из разложения функции $(1-\sqrt{1-4t})/2$

легко получить коэффициенты $T(k) = 2^{2k-1}|\binom{1/2}{k}|$. Задача о числах Каталана предлагалась на летней конференции Турнира городов в 2001 году.

(*А. Я. Белов*)

10.2. Условие. Кривая $\mathcal{C}$ задана в $\mathbb{R}^4$ параметрически уравнениями $x_i = P_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где многочлены $P_i(\tau)$ имеют степень 3. Докажите, что $\mathcal{C}$ живет в трехмерной плоскости (т. е. найдется 3-мерное аффинное подпространство, которое ее содержит).

Решение. Пусть A — точка кривой C, отвечающая значению параметра $\tau = 0$. Сдвинем начало координат в точку A. При этом уравнение кривой будет иметь вид $x_i = a_i\tau^3 + b_i\tau^2 + c_i\tau = P_i(\tau)$; $i = 1, \ldots, 4$ (свободные члены исчезли).

Четыре вектора $\vec{e}_i = (a_i, b_i, c_i)$; $i = 1, \ldots, 4$ линейно зависимы, т. е. при некоторых $\{\lambda_i\}_{i=1}^4$, из которых не все равны нулю, выполняется равенство $\sum_{i=1}^4 \lambda_i\vec{e}_i = 0$. Но тогда все коэффицинты суммы $\sum_{i=1}^4 \lambda_i P_i$ нулевые и при всех τ выполняется тождественное равенство $\sum_{i=1}^4 \lambda_i P_i(\tau) \equiv 0$. Оно означает, что кривая C лежит в трехмерном линейном пространстве.

Аналогичным образом показывается, что кривая n-й степени лежит в n-мерном аффинном пространстве.

Замечания. 1. Многочлен n-й степени от k переменных

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \sum_{\sum_{i=1}^k n_i \leqslant n} a_N \prod_{i=1}^k \tau_i^{n_i}$$

имеет $\binom{n}{k} + 1$ коэффициент. Отсюда можно получить, что параметрическое многообразие M степени n размерности k, задаваемое равенствами

$$x_j = \sum_{\sum_{i=1}^k n_i \leqslant n} a_{Nj} \prod_{i=1}^k \tau_i^{n_i}; j = 1, \ldots, k,$$

лежит в аффинном подпространстве размерности $\binom{n}{k}$. В случае общего положения оно не лежит в пространстве ме́ньшей размерности (для любых n и k).

2. Задача возникла из дифференциальной геометрии. Касательная прямая к гладкой кривой имеет близость 2-го порядка в точке касания, соприкасающаяся плоскость — третьего и т. д. Поскольку гладкую кривую с точностью до членов $n + 1$ порядка малости можно приблизить кривой n-го порядка, из решения задачи следует, что расстояние до соприкасающегося n-мерного пространства в точке касания имеет порядок малости $n + 1$.

(*А. Я. Белов*)

10.4. Условие. На плоскости проведены n систем равноотстоящих прямых; i-я система состоит из всех прямых вида $a_i x + b_i y = c_i + k, k \in \mathbb{Z}$. При этом никакие три прямых не пересекаются в одной точке, и никакие две системы не параллельны. Эти системы разбивают плоскость на многоугольники. Пусть S — средняя площадь многоугольника, S_{ij} — площадь параллелограмма решетки, порожденной i-й и j-й системами. Докажите, что

$$S^{-1} = \sum_{i<j} S_{ij}^{-1}\,.$$

(Средняя площадь многоугольника — это величина $S = \lim\limits_{t\to+\infty} S_t/N_t$, где S_t — общая площадь всех многоугольников разбиения, целиком содержащихся в круге радиуса t с центром в начале координат, N_t — количество этих многоугольников.)

Решение. i-я и j-я системы разбивают плоскость на решетку параллелограммов площади S_{ij}. Соответственно, S_{ij}^{-1} — это число таких параллелограммов в пересчете на единицу площади. Далее, в квадрате со стороной R площади R^2 количество частей разбиения $N(R)$ будет удовлетворять асимптотическому равенству $N \sim S \cdot R^2$, поэтому S^{-1} есть среднее число частей разбиения в единице площади и доказываемое равенство $S^{-1} = \sum_{i<j} S_{ij}^{-1}$ означает соответствие между параллелограммами решеток и частями разбиения.

Опишем это соответствие. Выберем направление общего положения, т.е. не перпендикулярное ни одной из прямых разбиения. Назовем его направлением *вниз*. Тогда у каждой части разбиения однозначно определен нижний угол, пара прямых его образующих и, соответственно, параллелограмм решетки с тем же нижним углом. Аналогичным образом каждому параллелограмму можно сопоставить многоугольник разбиения.

Теперь рассмотрим круг радиуса $R \to \infty$ и соответствие между частями, попавшими в этот круг. Из-за граничных эффектов соответствие нарушается. Следующая лемма показывает, что этими нарушениями можно пренебречь:

Лемма 1. Пусть D — максимальный диаметр параллелограммов решеток. Рассмотрим круг радиуса $R \to \infty$.

а) Существует константа C_1 такая, что количество частей разбиения выпуклой фигуры диаметра D системами прямых не превосходит C.

б) Существуют константы C_2 и C_3 такие, что количество параллелограмов решеток, а также частей разбиения попавших в круг радиуса R, не превосходит C_2R^2 и не меньше C_3R^2.

в) Существует константа C_4 такая, что количество параллелограмов решеток, а также частей разбиения попавших в полосу между концентрическими кругами радиуса R и $R+3D$, не превосходит C_4R.

г) При этом $\lim_{R\to\infty} C_4R/(C_3R^2)=0$.

Комментарии. 1. Для разбиения n-мерного пространства k системами равноотстоящих плоскостей общего положения справедлива аналогичная формула:

$$V^{-1}=\sum_{i_1<\dots<i_n} V^{-1}_{i_1<\dots<i_n}.$$

Систему прямых общего положения можно задать *вектором интенсивности* $\vec{f}$, направленным по нормали к плоскостям системы, длина которого равна d^{-1}, где d — расстояние между соседними плоскостями системы. Это – средняя площадь участков плоскостей системы в пересчете на единицу объема. Тогда $V^{-1}_{i_1<\dots<i_n}$ равен $\vec{f}_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec{f}_{i_n}$ – определителю матрицы, составленному из соответствующих векторов интенсивности. Формулу можно обобщить для непрерывного распределения систем плоскостей по направлениям. Данная формула верна не только для равноотстоящих систем, но и при довольно широких предположениях о законе распределения расстояний между ними. При самых широких предположениях получается равенство

$$V^{-1}=\frac{1}{2^n n!}\int \rho_{\vec{e}_1}\cdot\ldots\cdot\rho_{\vec{e}_n}|\vec{e}_1\wedge\dots\wedge\vec{e}_n|$$

Каждое $\vec{e}_i$ (вектор направлений) независимо пробегает $(n-1)$-мерную единичную сферу, $\rho_{\vec{e}_i}$ — соответствующая плотность интенсивности, множитель $\frac{1}{2^n n!}$ возникает из-за того, что один и тот же элемент объема возникает $2^n n!$ способами (перестановки и смена знаков). Когда направления систем сосредоточены в дискретным наборе возможностей (функция распределения есть сумма δ-функций), мы имеем дискретную формулу, доказываемую как выше. Общий случай получается аппроксимацией.

2. Задача возникла при вычислении средних объемов частей разбиения пространства системами трещин.

Литература.

1. А. Я. Белов. *Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов.* Дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.м.н. М.: МГИ, 1991.

2. Л. Санталло. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности.* М.: Наука, 1983.

(*А. Я. Белов*)