Виктор Тебо и его задачи

(к 125-летию со дня рождения В. Тебо (1882–1960))

Е. Д. Куланин

1. Биография

Виктор Мишель Жан-Мари Тебо (Victor Michel Jean-Marie Thebault) родился 6 марта 1882 г. в Амбриер ле Гран (Ambrieres-le-Grand) французского департамента Майенн (Mayenne).[1)] Его отец был ткачом. Учитель местной начальной школы, заметивший необыкновенные математические способности мальчика, добился для него стипендии в учительском колледже города Лаваль (Laval, Mayenne), где юноша обучался с 1898 по 1901 г. После окончания колледжа В. Тебо работал школьным учителем в Пре-эн-Пэйл (Pre-en-Pail, Mayenne) в течение 1902–1905 гг. до тех пор, пока его не пригласили на должность преподавателя технической школы в Эрни (Ernee, Mayenne). В 1909 г. в результате победы на конкурсных экзаменах В. Тебо получил право на преподавание в колледжах для учителей.

Поскольку скромное жалование преподавателя не могло обеспечить его семью, в которой к тому времени было уже 6 детей, В. Тебо был вынужден отказаться от преподавания. С 1910 по 1923 г. он работал фабричным суперинтендантом в Эрни. В дальнейшем В. Тебо занимал пост главного страхового инспектора в Ле Манс (Le Mans, Sarthe) и после выхода на пенсию в 1940 г. поселился в местечке Тенни (Tennie, Sarthe).

Все это время, несмотря на занятость на работе, он продолжал интенсивно и плодотворно заниматься математикой. Удивительно, как это ему удавалось, хотя справедливости ради следует заметить, что в истории математики все-таки были подобные примеры и даже в той же области деятельности — страховании. Так, страховщиками работали такие известные математики, как Сильвестр (1814–1897) и Грам (1850–1916), прославившийся своим определителем. Грам даже стал в 1896 г. директором страхового общества и председателем Датского страхового совета.

Но все же по современным меркам В. Тебо был не профессионалом, а любителем математики, что, впрочем, нисколько не умаляет его заслуг,

[1)] Все биографические сведения взяты из статьи [1].

которые были замечены и по достоинству оценены во всем мире. Так, в 1932 г. В. Тебо стал членом Американской математической ассоциации. В том же году его назначили чиновником по образованию (Officier de l'Instruction Publique) по рекомендации академика Оканя. В рекомендации, в частности, говорилось: «Лично я считаю его достойным глубокого уважения за его выдающийся талант математика, проявившийся в многочисленных остроумных достижениях в области элементарной геометрии — неисчерпаемом источнике задач, решение которых требует совершенно особого дара изобретательности».

В 1935 г. В. Тебо стал Кавалером ордена бельгийской короны за его деятельность в Брюссельском научном обществе и сотрудничество с журналами этого общества: Annales и Mathesis.

В 1943 г. он установил премию Виктора Тебо. Согласно положению об этой премии она присуждается каждые два года Парижской Академией Наук авторам оригинальных исследований по геометрии или теории чисел, причем предпочтение должно отдаваться учителям средних или даже начальных школ.

2. Научная деятельность

За свою жизнь В. Тебо представил 15 сообщений только в Парижскую Академию Наук, написал сотни статей и мемуаров по геометрии треугольника и тетраэдра, а также теории чисел. Еще большую известность он приобрел как автор оригинальных задач, 582 из которых напечатал только один журнал — American Mathematical Monthly. Всего же В. Тебо составил более 1000 задач и, вероятно, не имел равных себе соперников в этой области.

Научные интересы В. Тебо охватывали три раздела математики — геометрию треугольника и тетраэдра, а также теорию чисел. Он стал заниматься геометрией треугольника[2)] в первом десятилетии XX века, т. е. в то время, когда закончился первоначальный период развития этой дисциплины, и она превратилась в обширную и детально разработанную область геометрии, привлекавшую внимание многих математиков.

В. Тебо получил результаты практически во всех разделах элементарной геометрии: он исследовал треугольники, четырехугольники, многоугольники, коники и кубики, связанные с треугольником, ортопол, изопол и многое тому подобное.

С самого начала своей деятельности В. Тебо удалось доказать такую теорему, которую J. L. Coolidge, автор знаменитого «Трактата об окружности и сфере» (1916), счел нужным включить в свой труд, несмотря на

[2)] Все сведения об этом взяты из статьи [2].

то, что он узнал об этом результате после того, как соответствующая глава его книги уже была закончена.

В геометрии треугольника у В. Тебо существовали особо излюбленные темы, к которым он неоднократно возвращался. Одной из таких тем была теорема Фейербаха. В. Тебо исследовал точки Фейербаха в самой первой статье, напечатанной в Nouvelles Annales de Mathematiques (series 4, vol. 10, 1910, pp. 271–281).

Впоследствии он опубликовал полдюжины статей на эту тему, в которых выявил многочисленные свойства этих точек. В 1935 г. В. Тебо доказал следующую интересную теорему: в треугольнике ABC четыре треугольника с вершинами в точках Фейербаха треугольника ABC подобны четырем треугольникам с вершинами, совпадающими с основаниями соответствующих биссектрис треугольника ABC. Много результатов он получил также в геометрии тетраэдра. Выдающийся вклад В. Тебо в геометрию треугольника и тетраэдра позволил ему занять достойное место среди последователей Брокара, Лемуана и Нейберга — основателей геометрии треугольника и тетраэдра. Научная работа В. Тебо не прерывалась и в годы Второй мировой войны, несмотря на то, что на этот период ему пришлось эмигрировать в Испанию.

В. Тебо составлял также арифметические и теоретико-числовые задачи, в том числе занимательные, которые обычно относят к разряду математических развлечений. Интересно привести его ответ на упреки по поводу того, что он занимался такими пустяками: «Некоторые математики демонстрируют тенденцию, не свободную полностью от определенного презрения, видеть в таких задачах только незначительные пустяки. Пустяки, если угодно, но такие, решение которых часто требует не меньшей проницательности, изобретательности и тонкого искусства, чем многие вопросы, считающиеся значительно более важными. Кроме того, изучение элементарных утверждений требует немалых усилий, представляющих собой прекрасное интеллектуальное упражнение и приводящих, в конце концов, к чему-то заслуживающему внимания» [3]. Далее В. Тебо замечает, что не все великие мастера науки проявляли подобное презрение к математическим развлечениям и цитирует Эйлера, Якоби и других крупных математиков.

3. Задачи В. Тебо и вокруг них

Рассмотрим теперь несколько задач из необъятного задачного наследия В. Тебо. Самой знаменитой из них является, несомненно, задача 3887 о трех окружностях с коллинеарными центрами, условие которой было опубликовано в разделе «Задачи и решения» журнала American Mathematical Monthly в 1938 г. [4].

Приведем формулировку этой задачи.

> Пусть D — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC, I_1 — центр окружности, касающейся отрезков AD, BD и описанной окружности треугольника ABC; I_2 — центр окружности, касающейся отрезков CD, BD и описанной окружности треугольника ABC. Тогда отрезок I_1I_2 проходит через центр I вписанной в треугольник ABC окружности, и при этом
> $$I_1I : II_2 = \mathrm{tg}^2(\varphi/2), \text{ где } \varphi = \angle BDA.$$

Первые метрические решения этой задачи появились в Нидерландах в 1973 г., но не получили широкой известности. Поэтому журнал American Mathematical Monthly в 1983 г. дал в редакционном комментарии краткое изложение первого, как тогда казалось, метрического решения англичанина К. Тэйлора, рукопись которого насчитывала 24 страницы и содержала многочисленные формулы [5]. В 1986 г. в швейцарском журнале "Elemente der Mathematik" было опубликовано значительно более короткое метрическое решение Г. Турнвальда [6] и, наконец, в 1989 г. в том же журнале появилось первое синтетическое решение швейцарского учителя Р. Старка [7].

С тех пор появилось несколько элементарных синтетических решений, одно из самых удачных из которых принадлежит В. Протасову[3)] [8], а одно из самых последних — Д. Кодокостасу [9]. Ж. Айме, в статье которого [10] можно найти подробную историю и синтетическое решение этой задачи Тебо, обнаружил [10, с.226], что она является следствием теоремы, доказанной в 1905 г. преподавателем математики из Токио Савайяма [11].

На самом деле теорема Тебо о трех окружностях с коллинеарными центрами справедлива и для вневписанных окружностей. Точнее, пусть D — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC, I_1 — центр окружности, касающейся прямых AD, BD и описанной окружности треугольника ABC внешним образом; I_2 — центр окружности, касающейся прямых CD, BD и описанной окружности треугольника ABC внешним образом. Тогда отрезок I_1I_2 проходит через центр I_b вневписанной в треугольник ABC окружности, касающейся стороны AC.

Приведем еще формулировки двух задач, тесно связанных с задачей 3887.

> 1. Окружность касается продолжений сторон CA и CB треугольника ABC, а также касается стороны AB этого треугольника в точке P. Докажите, что радиус окружности, касающейся отрезков AP, CP и описанной около этого треугольника

[3)] Интересно отметить, что В. Протасов нашел это решение в то время, когда учился в IX классе средней школы г. Москвы.

> окружности, равен радиусу окружности, вписанной в этот треугольник [12].
>
> 2. Дан треугольник ABC, K — точка касания вписанной в него окружности и стороны BC. Рассмотрим две окружности, касающиеся прямой BC, луча AK и окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что их радиусы равны радиусу вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC [13].

Рассмотрим еще одну задачу В. Тебо. Это задача 4328, опубликованная в журнале American Mathematical Monthly в 1949 г. [14].

> Прямые Эйлера и окружность девяти точек. Дан треугольник ABC; AA_1, BB_1 и CC_1 — его высоты. Доказать, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C пересекаются в такой точке P окружности девяти точек, для которой один из отрезков PA_1, PB_1, PC_1 равен сумме двух других отрезков.

Элементарное синтетическое решение задачи 4328 приведено в статьях Е. Д. Куланина [15] и [16]. Точка P пересечения прямых Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C совпадает с центром равносторонней гиперболы, являющейся изогональным образом прямой Эйлера треугольника ABC. Эта гипербола называется гиперболой Джерабека (Jerabek). Будем тем не менее для краткости называть в этой статье точку пересечения прямых Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C точкой Тебо треугольника ABC и обозначать ее буквой T. В статьях [15] и [16] доказана следующая теорема.

Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, H_1, H_2, H_3 — основания его высот; $H_1'H_2'H_3'$ — треугольник, серединный треугольник которого совпадает с треугольником $H_1H_2H_3$. Тогда точки Тебо T, T_a, T_b, T_c треугольников ABC, BHC, CHA, AHB соответственно совпадают с точками Фейербаха треугольника $H_1'H_2'H_3'$, причем точка T совпадает с внутренней, а точки T_a, T_b, T_c — с внешними точками Фейербаха треугольника $H_1'H_2'H_3'$.

Из приведенной теоремы сразу же следует, что точки Фейербаха произвольного треугольника обладают указанным свойством точек Тебо, а именно: наибольшее из расстояний от любой точки Фейербаха треугольника до середин сторон этого треугольника равно сумме расстояний от этой же точки Фейербаха до двух других середин сторон треугольника.

И, наконец, последняя задача, тесно связанная с предыдущей [17].

> 4432. Окружности с центрами в серединах сторон треугольника проходят через основания соответствующих высот. Покажите, что окружность, ортогональная этим трем окружностям, касается окружности девяти точек данного треугольника в такой точке, расстояние от которой до основания одной из высот равно сумме расстояний от нее до оснований двух других высот.

В статье [16] показано, что на описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки такие, что наибольшее расстояние от любой из них до вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до остальных двух вершин треугольника. Если через вершины треугольника провести прямые, параллельные его противоположным сторонам, то эти точки совпадут с точками Фейербаха полученного треугольника, а если через вершины треугольника провести прямые, перпендикулярные биссектрисам, выходящим из этих вершин, то эти точки совпадут с точками Тебо полученного треугольника. Из всего сказанного становится ясно, что в задачах 4328 и 4432 речь идет об одной и той же точке, которую мы в данной статье называем точкой Тебо.

Назовем окружности с центрами в серединах сторон треугольника, проходящие через основания высот на этих же сторонах, ортомедиальными. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC и S, S_a, S_b, S_c — радикальные центры ортомедиальных окружностей треугольников ABC, BHC, CHA, AHB. Окружности S, S_a, S_b, S_c с центрами в этих точках, проходящие через точки Тебо T, T_a, T_b, T_c, треугольников ABC, BHC, CHA, AHB соответственно, назовем окружностями Тебо, E — общая окружность девяти точек треугольников ABC, BHC, CHA, AHB. Ясно, что четырехугольники $SS_aS_bS_c$ и $TT_aT_bT_c$ перспективны с центром перспективы E.

Тогда из результата задачи 4432 вытекает такое следствие: прямая Гаусса четырехугольника, образованного радикальными осями окружности девяти точек и окружностей Тебо треугольников ABC, BHC, CHA, AHB, т. е. радикальными осями окружностей E и S, E и S_a, E и S_b, E и S_c, совпадает с прямой Эйлера ортоцентрического треугольника треугольников ABC, BHC, CHA, AHB.

Приведем еще пару любопытных фактов, относящихся к рассматриваемой конфигурации.

I. Радикальные оси окружностей S_a, S_b, S_c совпадают с высотами треугольника ABC; радикальные оси окружностей S и S_a, S и S_b, S и S_c совпадают со сторонами треугольника ABC, так что A, B, C, H — радикальные центры соответствующих троек окружностей.

Интересно сравнить это утверждение с аналогичным результатом [18] об ортоцентроидальных окружностях[4)] треугольников ABC, BHC, CHA, AHB, полученным в качестве следствия известной теоремы Гриффитса [19, 20]: радикальные оси ортоцентроидальных окружностей треугольников BHC, CHA, AHB совпадают с высотами треугольника ABC; радикальные оси ортоцентроидальных окружностей треугольников ABC и BHC, ABC и CHA, ABC и AHB совпадают со сторонами треугольника ABC, так что A, B, C, H — радикальные центры соответствующих троек окружностей.

II. Точка S — ортоцентр треугольника $S_aS_bS_c$, гомотетичного треугольнику ABC с центром гомотетии, совпадающим с центром тяжести ортоцентрического треугольника ABC, и коэффициентом гомотетии -2.

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с его противоположными сторонами, пересекаются в одной точке N, которая называется точкой Нагеля. На самом деле существуют еще три точки Нагеля N_a, N_b, N_c. Точка N_b совпадает с точкой пересечения трех прямых, первая из которых проходит через вершину A и точку касания вневписанной окружности I_c со стороной BC, вторая — через вершину B и точку касания вписанной окружности I со стороной AC, третья — через вершину C и точку касания вневписанной окружности I_a с продолжением стороны AB. Точки N_a и N_c определяются аналогично. Эти факты легко доказать, используя теорему Чевы. Приведем без доказательства еще три теоремы.

Теорема 1. Четырехугольник, вершины которого совпадают с точками Нагеля треугольника ABC, гомотетичен четырехугольнику с вершинами в центрах вписанной и вневписанных окружностей треугольника ABC с центром гомотетии, совпадающим с центром тяжести ортоцентрического треугольника треугольника ABC, и коэффициентом гомотетии -2.

Теорема 2. Пусть O — центр описанной окружности разностороннего треугольника; N, N_a, N_b, N_c — его точки Нагеля. Тогда четыре точки описанной окружности этого треугольника такие, что расстояние от любой из них до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника, лежат по одной на прямых ON, ON_a, ON_b, ON_c.

Теорема 1 является следствием такого известного факта: отрезки, соединяющие соответствующие точки Нагеля данного треугольника с центрами его вписанной и вневписанных окружностей, пересекаются в

[4)] Ортоцентроидальной называется окружность, построенная, как на диаметре, на отрезке, соединяющем ортоцентр с центром тяжести треугольника.

центре тяжести этого треугольника и делятся им в отношении $2:1$, считая от точек Нагеля.

Для доказательства теоремы 2 надо, кроме того, использовать теорему Фейербаха и то, что на описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки такие, что наибольшее расстояние от любой из них до вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до остальных двух вершин треугольника.

Теорема 3. Точки Нагеля ортоцентрического треугольника $H_aH_bH_c$ треугольника ABC совпадают с радикальными центрами ортомедиальных окружностей треугольников ABC, BHC, CHA, AHB, т. е. с точками S, S_a, S_b, S_c.

Поскольку мы договорились называть окружности S, S_a, S_b, S_c окружностями Тебо, то теорему 3 можно сформулировать более кратко.

Теорема 3$'$. Центры окружностей Тебо треугольников ABC, BHC, CHA, AHB совпадают с точками Нагеля общего ортоцентрического треугольника этих треугольников.

Теперь становится ясно, что утверждение II вытекает из результата задачи 4432 и теорем 1–3.

В заключение заметим, что утверждение I тесно связано со следующим фактом.

I$'$. Обозначим через I, I_a, I_b, I_c вписанную и вневписанные окружности треугольника ABC. Тогда радикальные оси окружностей I_a, I_b, I_c образуют треугольник, гомотетичный треугольнику $I_aI_bI_c$ с центром гомотетии, совпадающим с центром тяжести треугольника ABC, и коэффициентом гомотетии $-1/2$, причем радикальные оси окружностей I и I_a, I и I_b, I и I_c содержат высоты треугольника, образованного радикальными осями окружностей I_a, I_b, I_c, а ортоцентр и вершины этого треугольника совпадают с центрами вписанной и вневписанных окружностей треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника ABC.

Из всего сказанного становится понятным, что окружность Тебо остроугольного треугольника совпадает с вписанной окружностью треугольника, серединами сторон которого служат основания высот исходного остроугольного треугольника, а окружность Тебо тупоугольного треугольника совпадает с одной из вневписанных окружностей треугольника, серединами сторон которого являются основания высот этого тупоугольного треугольника.

В заключение автор выражает благодарность О. А. Файнштейну (Лейпциг) за предоставленные материалы о В. Тебо.

Список литературы

[1] Byrne W. E., col. *Victor Thebault — The man* // Amer. Math. Month. 1947. P. 443–444.

[2] Court N. A. *Thebault — the geometer* // Amer. Math. Month. 1947. P. 445–446.

[3] Starke E. P. *Thebault — the number theorist* // Amer. Math. Month. 1947. P. 445.

[4] Thebault V. *Problem* 3887. *Three circles with collinear centers* // American Mathematical Monthly. Vol. 45, 1938. P. 482–483.

[5] Taylor K. B. *Solution of Problem* 3887 // Amer. Math. Month. Vol. 90, 1983. P. 482–487.

[6] Turnwald G. *Uber eine Vermutung von Thebault* // Elemente der Mathematik. Bd. 41, 1986. S. 11–13.

[7] Stark R. *Eine weitere Losung der Thebault'schen Aufgabe* // Elemente der Mathematik. Bd. 41, 1989. S. 130–133.

[8] *Факультативный курс по математике*. М: Просвещение, 1991. С. 341–343.

[9] Kodokostas D. *A really elementary proof of Thebault's theorem.* Worcester Polytechnic Institute, USA.
`http://users.wpi.edu/~goulet/mme518_2004/Project%232_2004/thebth.pdf`

[10] Ayme J.-L. *Sawayama and Thebault's theorem* // Forum Geometricorum. Vol. 3, 2003. P. 225–229.

[11] Sawayama Y. *A new geometrical proposition* // Amer. Math. Monthly. Vol. 12, 1905. P. 222–224.

[12] Четвертая Соросовская олимпиада школьников 1997–1998. М: МЦНМО, 1998. С. 102, 112–113.

[13] Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 5, М.: МЦНМО, 2001. С. 218–219.

[14] Thebault V. *Problem* 4328 // American Mathematical Monthly. Vol. 56, 1949. P. 39.

[15] Куланин Е. Д. *Об одном свойстве точек Фейербаха* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №10, 1997.

[16] Куланин Е. Д. *О некоторых свойствах точек Фейербаха и Тебо* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №15, 2005.

[17] Thebault V. *Problem* 4432 // American Mathematical Monthly. Vol. 58, 1951. P. 195.

[18] Droussent L. *On the orthocentroidal circle* // American Mathematical Monthly. Vol. 57, 1950. P. 169–171.

[19] Griffiths J. // Nouvelles Annales de Mathematiques. 1864. P. 345; ibid. 1865. P. 322.

[20] Droussent L. *On a theorem of J. Griffiths* // American Mathematical Monthly. Vol. 54, 1947. P. 538–540.

Е. Д. Куланин, Московский городской психолого-педагогический университет
e-mail: `lucas03@mail.ru`