Разные взгляды на изогональное сопряжение

А. В. Акопян* А. А. Заславский

Пусть дан произвольный треугольник ABC и точка P, не лежащая на его сторонах. Отразим прямые, соединяющие вершины треугольника с P, относительно биссектрис соответствующих вершин треугольника. Из теоремы Чевы следует, что полученные три прямые пересекаются в одной точке (или же параллельны, т. е. пересекаются в бесконечно удаленной точке на проективной плоскости), обозначим ее P' (рис. 1). Точку P' называют *изогонально сопряженной* точке P относительно треугольника ABC, а преобразование, переводящее каждую точку проективной плоскости в изогонально сопряженную, — *изогональным сопряжением*.

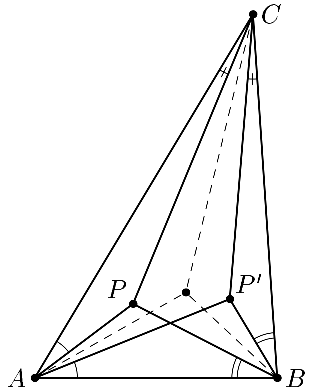

Рис. 1.

Если P лежит на стороне треугольника, то, применив к ней изогональное сопряжение, получим противоположную вершину треугольника. Соответственно, для вершин изогонально сопряженная точка определена неоднозначно. Если же исключить из рассмотрения стороны треугольника, то изогональное сопряжение будет взаимно однозначной инволюцией, т. е. преобразованием, квадрат которого равен тождественному. Очевидно также, что эта инволюция имеет ровно 4 неподвижных точки: центры вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-648

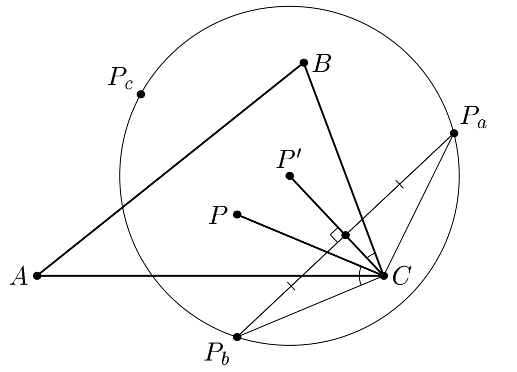

Рис. 2.

Для изучения свойств изогонального сопряжения оказывается полезным еще один способ построения сопряженной точки.

Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC, P_a симметрична P относительно стороны BC, P_b и P_c определены аналогично (рис. 2). Пусть P' — это центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$. Точка C равноудалена от P_a и P_b, следовательно прямая CP' является серединным перпендикуляром к отрезку P_aP_b. А значит $\angle P_aCP' = \frac{1}{2}\angle P_aCP_b = \angle C$. Но тогда $\angle BCP' = \angle P_aCP' - \angle BCP_a = \angle C - \angle BCP = \angle ACP$. Аналогично показывается, что $\angle ABP' = \angle CBP$ и $\angle BAP' = \angle CAP$. А это и означает, что точка P' изогонально сопряжена P относительно ABC.

Если точка P вне треугольника, то рассуждения абсолютно аналогичны, но, когда P лежит на описанной окружности ABC, ее проекции на стороны треугольника лежат на одной прямой (прямая Симсона). Соответственно, треугольник $P_aP_bP_c$ оказывается вырожденным, и центр его описанной окружности не определен. В этом случае естественно описанной окружностью считать прямую P_aP_b, а ее центром — точку на бесконечно удаленной прямой, соответствующую направлению, перпендикулярному P_aP_b. Таким образом, мы фактически доказали следующее свойство изогонального сопряжения.

Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то изогонально сопряженной точке P будет точка на бесконечно удаленной прямой, которая задает направление, перпендикулярное прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

Напомним, что треугольник, образованный проекциями точки P на стороны треугольника ABC, называется *педальным треугольником* P относительно ABC, а описанная около него окружность *педальной окружностью* P. Из второго построения изогонально сопряженных точек следует, что центр педальной окружности точки P — это середина отрезка PP', а ее радиус в два раза меньше отрезка $P'P_a$. Действительно, педальная окружность точки P — это окружность, получающаяся из описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$ гомотетией с центром в P и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Отсюда, очевидно, вытекает следующая теорема:

Теорема 1. *Педальные окружности двух точек совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены.*

Рассмотрим теперь не лежащую на описанной окружности точку P и изогонально сопряженную ей P'. Пусть K_a, K_b и K_c — это точки пересечения прямых BC и $P'P_a$, AC и $P'P_b$, AB и $P'P_c$ (рис. 3). Тогда $\angle PK_aB = \angle P'K_aC$, и, следовательно, коника с фокусами в P и P' и суммой (или модулем разности) расстояний до фокусов, равным $P'P_a$, касается прямой BC. Аналогично показывается, что эта же коника касается двух других сторон треугольника, поскольку $P'P_a = P'P_b = P'P_c$ и равно удвоенному радиусу педальной окружности точки P. Если же P лежит на описанной окружности, то аналогичные рассуждения показывают, что P — фокус касающейся сторон треугольника параболы. Таким образом, для любой пары изогонально сопряженных точек найдется вписанная в треугольник коника с фокусами в этих точках. Легко доказывается и обратное утверждение: фокусы любой вписанной в треугольник коники изогонально сопряжены. Это дает третий способ определения изогонального сопряжения. На рис. 4 отмечены зоны, где соответствующие точкам коники будут эллипсами, параболами или гиперболами.

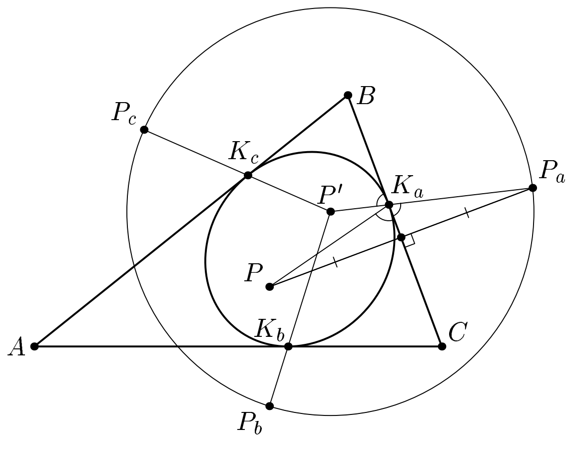

Рис. 3.

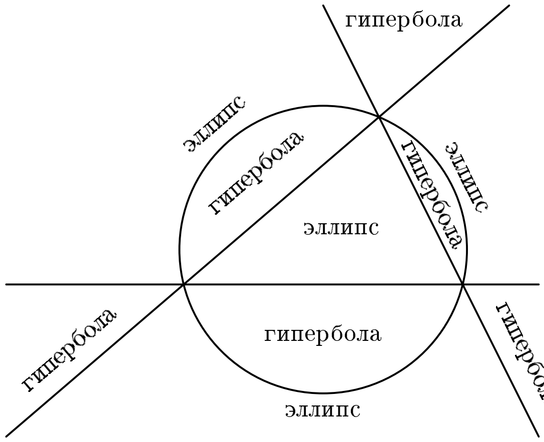

Рис. 4.

Наконец, изогональное сопряжение можно определить проективно. Чтобы сделать это, напомним основные сведения проективной геометрии.

Пусть на комплексной проективной плоскости даны коника $\mathcal{C}$ и не лежащая на ней точка A. Проведем через A две прямые, пересекающие $\mathcal{C}$ в точках X_1, X_2 и Y_1, Y_2. Пусть U — точка пересечения прямых X_1Y_1 и X_2Y_2, V — точка пересечения прямых X_1Y_2 и X_2Y_1. Тогда прямая UV не зависит от выбора прямых X_1X_2 и Y_1Y_2, а определяется только точкой A. Эта прямая называется *полярой* A относительно $\mathcal{C}$, а A — *полюсом* прямой UV. Полярой точки, лежащей на конике, является касательная к конике в этой точке. Важным свойством полюсов и поляр является взаимность: если точка A лежит на поляре точки B, то и B лежит на поляре A. Подробнее о свойствах поляр можно прочитать в [3].

Пусть даны четыре точки общего положения A, B, C, D. Они определяют пучок проходящих через эти точки коник. Рассмотрим поляры фиксированной точки P относительно коник этого пучка. Оказывается верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть A, B, C, D — четыре различных точки, X, Y, Z — точки пересечения AB и CD, AC и BD, AD и BC, P — точка, отличная от X, Y, Z. Тогда поляры P относительно всех коник пучка, заданного точками A, B, C, D, проходят через одну точку.*

Частным случаем пучка коник является пучок окружностей, т. е. множество окружностей, для любых двух из которых радикальной осью является одна и та же прямая. Эта прямая называется радикальной осью пучка. Пучок коник является пучком окружностей тогда и только тогда, когда две из задающих его точек являются так называемыми круговыми точками, т.е. комплексными бесконечно удаленными точками с проективными координатами $(1, \pm i, 0)$.

Приведем доказательство теоремы для случая пучка окружностей. Поляра бесконечно удаленной точки относительно любой окружности перпендикулярна задаваемому этой точкой направлению. Поэтому все поляры бесконечно удаленной точки X проходят через бесконечно удаленную точку X^*, которая задает направление, перпендикулярное направлению, задаваемому X.

Теперь рассмотрим конечную точку X.

Пусть l — радикальная ось пучка. Поляра точки X относительно любой окружности ω проходит через точки касания ω с касательными к ней из X, а радикальная ось X и ω — через середины отрезков между X и точками касания. Поскольку наши окружности образуют пучок, существует радикальный центр точки X и окружностей нашего пучка (т.е. точка, степень которой относительно всех окружностей и X одинакова). А именно, это будет точка пересечения l и радикальной оси ω и X. Обозначим ее за X'. Значит, все поляры точки X проходят через точку X^*, лежащую на луче XX' и находящуюся в два раза дальше от точки X, чем точка X'. Из приведенной конструкции легко понять, что для любой прямой l', проходящей через X', найдется такая окружность ω', что l' будет радикальной осью ω' и X. Это будет окружность из пучка, центр которой лежит на перпендикуляре к l', пущенном из X.

Для доказательства теоремы в общем случае проще перейти к двойственному утверждению.

Теорема 3. *Пусть даны четыре прямые l_i, $i = 1, \dots, 4$. X_{ij} — точка пересечения l_i и l_j. Тогда геометрическим местом полюсов любой прямой, отличной от $X_{12}X_{34}$, $X_{13}X_{24}$, $X_{14}X_{23}$, относительно коник двойственного пучка, заданного прямыми l_i (т. е. коник, касающихся l_i) будет прямая (рис. 5).*

Доказательство. Применим проективное преобразование, переводящее исходную прямую в бесконечно удаленную. Из условия следует, что в этом случае прямые l_i образуют четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. Докажем, что центры вписанных в него коник лежат на так называемой *прямой Гаусса*, проходящей через середины диагоналей четырехугольника. Теорема отсюда следует, так как полюсом бесконечной прямой относительно коники является центр этой коники.

Отметим, что прямая Гаусса является геометрическим местом точек P, для которых $S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PBC} + S_{PDA}$ (площади считаются положительными или отрицательными в зависимости от ориентации

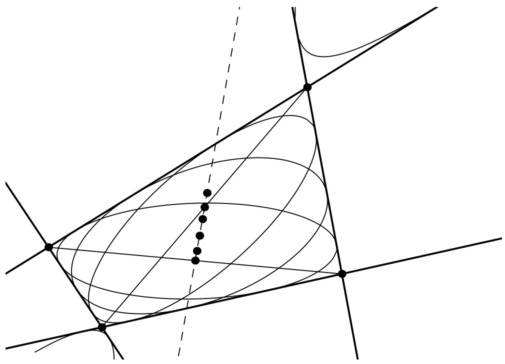

Рис. 5.

соответствующего треугольника). Действительно, площадь каждого из четырех треугольников есть линейная функция от координат точки P, следовательно, множеством точек, удовлетворяющих указанному соотношению, является прямая. Очевидно, что середины диагоналей принадлежат этой прямой.

Пусть теперь в четырехугольник $ABCD$ вписана коника с фокусами F_1, F_2. Так как ее центром является середина отрезка F_1F_2, утверждение теоремы равносильно тому, что $S_{F_1AB} + S_{F_1CD} + S_{F_2AB} + S_{F_2CD} = S_{F_1BC} + S_{F_1DA} + S_{F_2BC} + S_{F_2DA}$. Пусть F_1' — точка, симметричная F_1 относительно AB. Тогда $S_{F_1AB} + S_{F_2AB} = S_{F_1'AF_2B} = AF_1' \cdot AF_2 \sin\angle F_1'AF_2 + BF_1' \cdot BF_2 \sin\angle F_1'BF_2$. Но прямые, соединяющие точки F_1, F_2 с любой из вершин $ABCD$, симметричны относительно биссектрисы соответствующего угла, следовательно, $\angle F_1'AF_2 = \angle F_1AB + \angle F_2AB = \angle A$, $\angle F_1'BF_2 = \angle B$ и $S_{F_1'AF_2B} = AF_1 \cdot AF_2 \sin\angle A + BF_1 \cdot BF_2 \sin\angle B$. Из этого и аналогичных равенств следует, что как левая, так и правая части искомого соотношения равны $AF_1 \cdot AF_2 \sin\angle A + BF_1 \cdot BF_2 \sin\angle B + CF_1 \cdot CF_2 \sin\angle C + DF_1 \cdot DF_2 \sin\angle D$.

Отметим, что частным случаем доказанной теоремы является теорема Монжа, утверждающая, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр лежит на прямой Гаусса.

Пусть теперь задающие пучок точки A, B, C, D образуют ортоцентрическую четверку (т. е. каждая точка является ортоцентром треугольника, образованного остальными). Покажем, что полученная точка пересечения поляр изогонально сопряжена P относительно треугольника XYZ.

Действительно, поляра точки P относительно вырожденной кривой, являющейся объединением прямых AB и CD — это прямая, симметричная XP относительно AB. Так как AB и CD — биссектрисы угла YXZ,

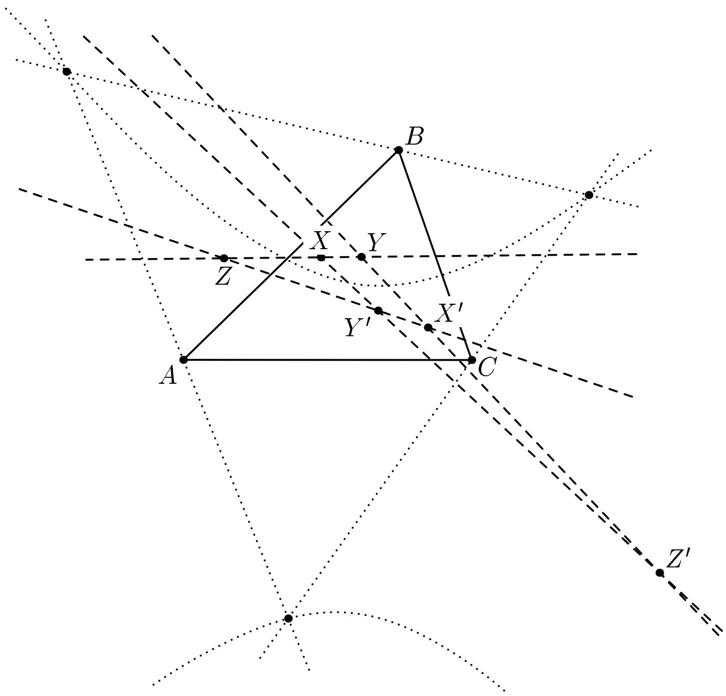

Рис. 6.

эта прямая проходит через изогонально сопряженную P точку P'. Аналогично через P' проходит поляра P относительно другой вырожденной кривой, а значит, и относительно любой кривой пучка.

Таким образом, мы получили четвертый способ определения изогонального сопряжения. Используя его, можно доказать следующее красивое свойство.

Теорема о трех парах точек. *Пусть дан треугольник ABC и две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y'. Тогда точки пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены* (*рис.* 6).

Доказательство. Рассмотрим пучок коник, порождающий нужное сопряжение. Выберем из него конику, относительно которой поляра точки X совпадает с прямой $X'Y'$. Тогда поляра Y' проходит через X, т. е. совпадает с XY, а полюсом прямой XY' является точка пересечения XY и $X'Y'$. Следовательно, сопряженная к этой точке лежит на XY'. Аналогично она лежит на $X'Y$.

В заключение этого раздела напомним несколько примеров изогонально сопряженных точек.

Самой известной парой изогонально сопряженных точек является пара H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника. Их общей педальной окружностью будет окружность Эйлера.

Изогонально сопряженной точкой к центру тяжести будет точка Лемуана. Самое простое ее определение следующее. Обозначим через A' точку пересечения касательных к описанной окружности, построенных из вершин B и C нашего треугольника. Аналогично определим B' и C'. Оказывается, что AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Эту точку и принято называть точкой Лемуана.

Точки Брокара: первая точка Брокара $(Br)_1$ определяется равенством

$$\angle BA(Br)_1 = \angle CB(Br)_1 = \angle AC(Br)_1,$$

вторая — $(Br)_2$ — равенством:

$$\angle AB(Br)_2 = \angle BC(Br)_2 = \angle CA(Br)_2.$$

Точки Торичелли и точки Аполлония. Точки Торичелли — это точки, из которых все стороны видны под углами (направленными) 60° и 120°. Одна из этих точек интересна тем, что в треугольниках, где все углы меньше 120°, на ней достигается минимум суммы расстояний до вершин. Точки Аполлония — это точки, педальные треугольники которых правильные.

Точки Жергонна и Нагеля, в которых пересекаются прямые, соединяющие вершины треугольника и точки касания его противоположных сторон с вписанной (вневписанными) окружностью, изогонально сопряжены центрам гомотетии вписанной и описанной окружностей треугольника.

Последний пример несколько необычен для классической геометрии. Пусть z_1, z_2, z_3 — три комплексных числа, а Z_1, Z_2, Z_3 — точки, обозначающие их на комплексной плоскости. Пусть X и Y — точки, соответствующие корням производной многочлена $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Оказывается, они тоже изогонально сопряжены.

Доказательства этих фактов приводятся в [1].

В качестве еще одной иллюстрации докажем теорему Паскаля, используя изогональное сопряжение.

Теорема 4 (Паскаль). *Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на конике. Тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.*

Доказательство. Мы рассмотрим только один случай расположения точек на окружности (конике). Остальные рассматриваются аналогично.

Переведем проективным преобразованием конику в окружность. Получим следующую конструкцию (рис. 7):

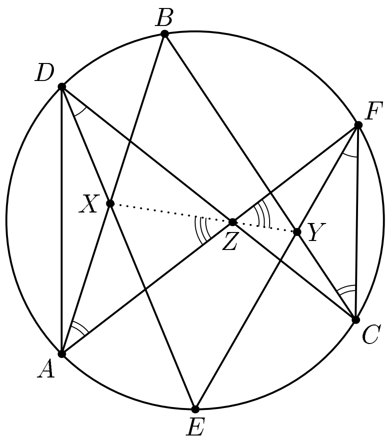

Рис. 7.

Точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке X, прямые BC и EF — в точке Y, а AF и CD — в точке Z. Надо доказать, что X, Y и Z лежат на одной прямой.

Углы BAF и BCF равны, поскольку опираются на одну дугу. Аналогично равны углы CDE и CFE. Кроме того, треугольники AZD и CZF подобны. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник AZD в CZF. При этом преобразовании точка X перейдет в точку X', изогонально сопряженную точке Y относительно треугольника CZF (в силу вышеуказанных равенств углов). Поэтому $\angle AZX = \angle CZX' = \angle FZY$, что и означает, что точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

Изогональное сопряжение в четырехугольниках

Пусть дан четырехугольник $ABCD$ и точка P. В общем случае прямые, симметричные AP, BP, CP, DP относительно биссектрис соответствующих углов четырехугольника, не пересекаются в одной точке. Однако нетрудно показать, что если три из этих прямых пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку. Геометрическим местом точек P, для которых это условие выполняется, будет некоторая кривая. Исследуем ее свойства.

Отметим, что существование точки, изогонально сопряженной X, равносильно существованию коники с фокусом в X, касающейся прямых AB, BC, CD, DA, или существованию окружности, проходящей через проекции X на стороны четырехугольника (доказательство этого факта аналогично доказательству для треугольника, см. рис. 8). Последнее и дает нам возможность описать геометрическое место таких точек X.

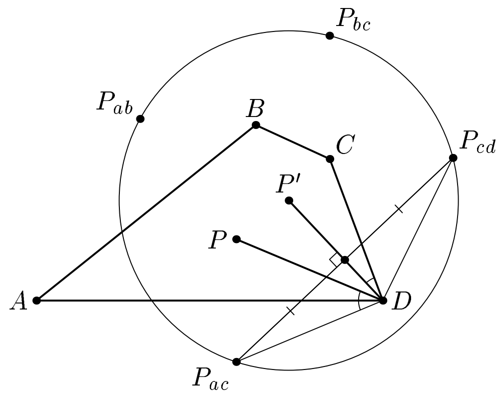

Рис. 8.

Итак, пусть нам дан двойственный пучок коник (т. е. коник, касающихся четырех данных прямых). Для наглядности будем считать, что все коники пучка касаются четырех различных действительных прямых. Все вышесказанное аналогично обобщается и на прямые общего положения.

Рассмотрим двойственный пучок коник, который определяется прямыми l_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Иначе говоря, все рассматриваемые коники касаются этих четырех прямых. Это значит, что проекции фокусов на эти четыре прямые лежат на одной окружности.

Обозначим координаты точки F через (x, y), а ее проекций на прямые l_i, через (x_i, y_i). Существование окружности, проходящей через точки с координатами (x_i, y_i), равносильно существованию ненулевого решения системы уравнений:

$$a(x_i^2 + y_i^2) + bx_i + cx_i + d = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Что в свою очередь равносильно равенству нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Покажем, что это соотношение дает кубическое уравнение на (x, y). Элементы второго и третьего столбца, очевидно, являются линейными функциями от (x, y). Однако элементы первого столбца таковыми не являются. Покажем, что если из первого столбца вычесть второй и третий столбец, помноженные на x и y соответственно (а, как известно, определитель при этом не изменится), то его элементы станут линейными.

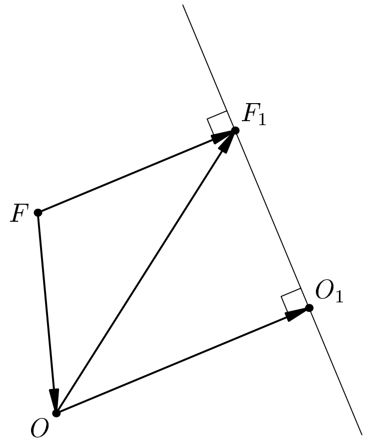

Рис. 9.

А значит, определитель будет многочленом не выше, чем третьей степени от x и y.

Обозначим за O начало координат, проекцию точек F и O на l_1 через F_1 и O_1 соответственно. Тогда (рис. 9):

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - (x_1x + y_1y) &= OF_1^2 - \langle \overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF} \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_1} - \overrightarrow{OF} \rangle = \langle \overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{FF_1} \rangle = \langle \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1F}, \overrightarrow{FF_1} \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{FF_1} \rangle = \pm |OO_1| \cdot |FF_1|. \qquad (3) \end{aligned}$$

И, значит, $x_1^2 + y_1^2 - (x_1x + y_1y)$ прямо пропорционально расстоянию от точки F до прямой l_1, а это линейная функция от (x, y). Аналогично для других трех прямых.

Итак, мы показали, что множеством точек, для которых определено изогональное сопряжение относительно четырехугольника, является некоторая кривая третьего порядка или кубика. Выведем теперь уравнение этой кубики в специально выбранной системе координат.

Известно, что для любых четырех прямых общего положения четыре окружности, описанные около треугольников, образованных каждыми тремя из этих прямых, пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Микеля* данных четырех прямых. Проекции точки Микеля на данные прямые лежат на одной прямой, которая является ее прямой Симсона относительно всех четырех треугольников. Отсюда следует, что точка Микеля лежит на нашей кубике, а изогонально сопряженной ей является бесконечно удаленная точка, т. е. точка Микеля — фокус параболы, касающейся всех сторон четырехугольника.

Примем точку Микеля за начало координат, а направление, параллельное оси параболы, за ось y. Если a, b, c и d — удвоенные абсциссы точек касания прямых l_i с параболой, то уравнение кубики имеет вид:

$$4(x^2+y^2)(4x-(a+b+c+d))-x(1-ab-ac-ad-bc-cd+abcd)+ \\ +y(abc+abd+acd+bcd-a-b-c-d)=0. \tag{4}$$

Или:

$$(x^2+y^2)(x+A)=Bx+Cy. \tag{5}$$

Из уравнения следует, что эта кубика проходит через круговые точки.

Отметим также, что ось y при этом будет параллельна прямой Гаусса прямых l_i (см. [1])).

Пусть теперь U, U' и V, V' — две пары лежащих на кубике сопряженных точек. Тогда из теоремы о трех парах точек следует, что точки W и W' пересечения UV с $U'V'$ и UV' с $U'V$, соответственно, изогонально сопряжены относительно треугольника, образованного любыми тремя из прямых l_i. Значит, они изогонально сопряжены и относительно четырехугольника, т.е. тоже лежат на кубике. Таким образом, третьи точки пересечения прямых UV и $U'V'$ с кубикой совпадают. Это утверждение допускает красивую интерпретацию, если рассмотреть на кубике фокусов групповой закон.

Напомним, что на любой кубике можно ввести операцию сложения точек следующим образом [5]. Выделим на кубике некоторую точку O. Для любых двух точек кубики A, B найдем третью точку C пересечения кубики с прямой AB, а затем третью точку пересечения кубики с прямой OC. Эту точку и назовем суммой $A+B$. Очевидно, что введенная операция коммутативна. Нетривиальным оказывается, что она и ассоциативна, и значит, превращает множество точек кубики в группу (отметим, что частными случаями этого утверждения являются известные проективные теоремы Паппа и Паскаля).

Теперь, если функцию сопряжения обозначить через $f()$, то сформулированное выше утверждение можно записать в виде:

$$a+b=f(a)+f(b), \forall a,b. \tag{6}$$

Вместо b взяв 0 получаем, что:

$$a=f(a)+f(0), \forall a. \tag{7}$$

С другой стороны при $b=a$ получаем, что:

$$a+a=f(a)+f(a), \forall a. \tag{8}$$

Из двух последних уравнений следует, что сопряженной к любой точке кубики A будет точка $A+X$, где X такая точка, что $X+X=0$. Отметим

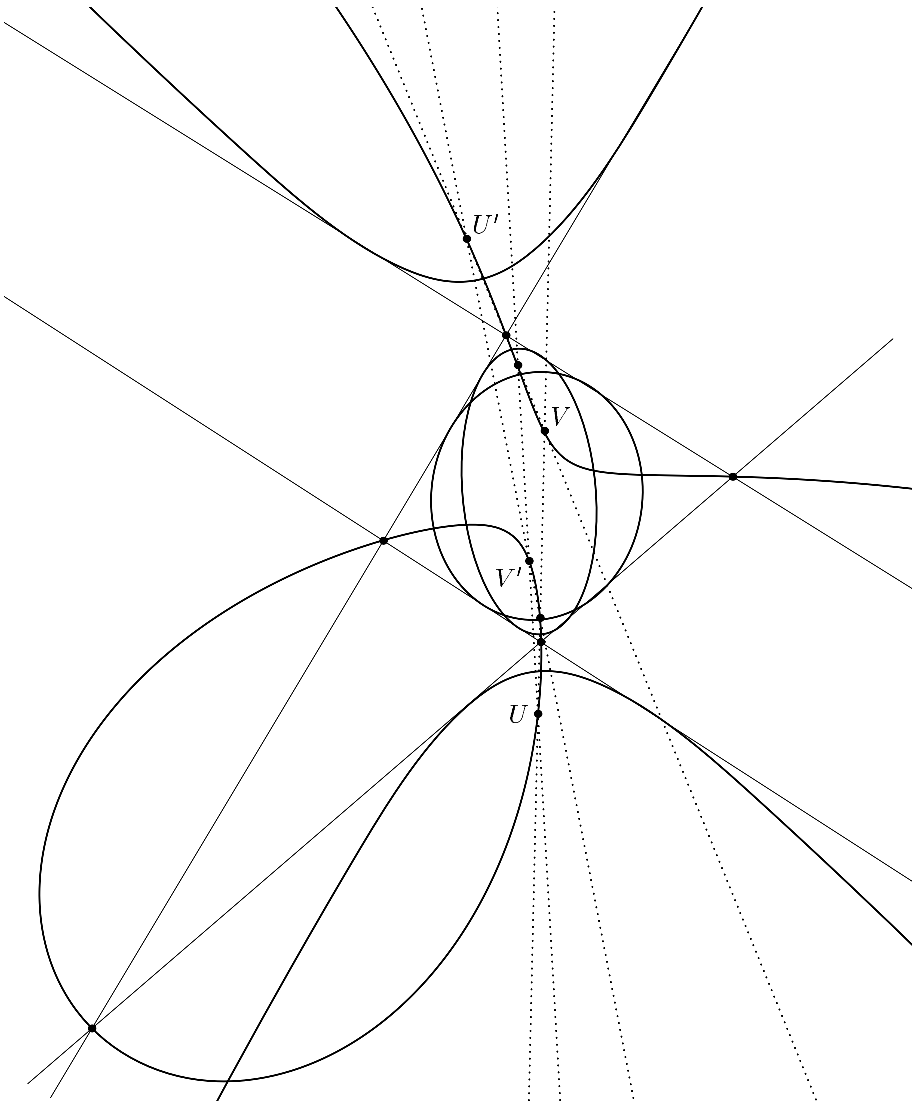

Рис. 10.

также, что *середины отрезков с концами в сопряженных точках лежат на одной прямой* (прямой Гаусса нашего четырехугольника).

На рис. 10 приведен пример такой кубики и проиллюстрирована теорема о трех парах точек.

Выясним теперь, порождается ли кубика фокусов какими-либо другими четырехугольниками.

Лемма 1. *Пусть фокусы некоторого двойственного пучка образуют невырожденную (т. е. не распадающуюся на прямую и конику) кубику α. Пусть A, A^* и B, B^* — две пары сопряженных точек на этой кубике. Тогда фокусы коник, касающихся сторон четырехугольника ABA^*B^*, тоже лежат на кубике α.*

Доказательство. Достаточно показать, что если C и C^* — изогонально сопряженные точки в четырехугольнике ABA^*B^*, то B и B^* — изогонально сопряженные точки в четырехугольнике ACA^*C^*. Действительно, если это так, то порожденные этими четырехугольниками кубики в обоих случаях должны проходить через все шесть точек, а также через точки пересечения пар прямых, проходящих через сопряженные точки (например, AB и A^*B^*). Этих точек больше 10, а через 10 точек, лежащих на невырожденной кубике, не может проходить никакая другая кубика. Далее от пары (A, A^*) и (C, C^*) аналогично переходим к паре сопряженных точек (C, C^*) и (D, D^*). А это и требуется.

Итак, пусть дан четырехугольник ABA^*B^* и две изогонально сопряженные точки C и C^*. Нам надо доказать, что B и B^* — изогонально сопряженные точки в четырехугольнике ACA^*C^*. Равенства $\angle BAC = \angle C^*AB^*$ и $\angle BA^*C = \angle C^*A^*B^*$ следуют из изогональности точек C и C^*. Для доказательства другого равенства достаточно показать, что $\angle ACB^* + \angle A^*CB = 180°$ (см. рис. 11). Но это, очевидно, следует из

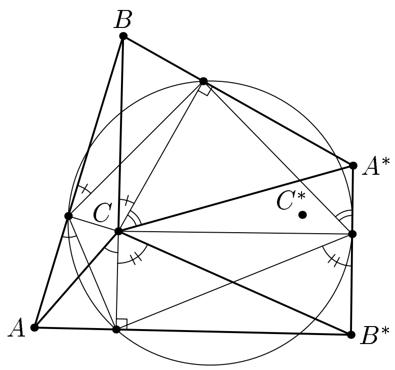

Рис. 11.

того, что проекции точки C на стороны четырехугольника лежат на одной окружности, а сумма углов противоположных вершин вписанного четырехугольника равна развернутому углу.

Опишем теперь некоторые интересные частные случаи кубики фокусов.

Если двойственный пучок содержит окружность, то кубика α имеет самопересечение в центре этой окружности (центр I окружности сопряжен сам себе, так что точки A и $f(A)$ «встречаются» в I). Если таких окружностей две, то кубика будет иметь две точки самопересечения, а это значит что она распадается на прямую и окружность (рис. 12).

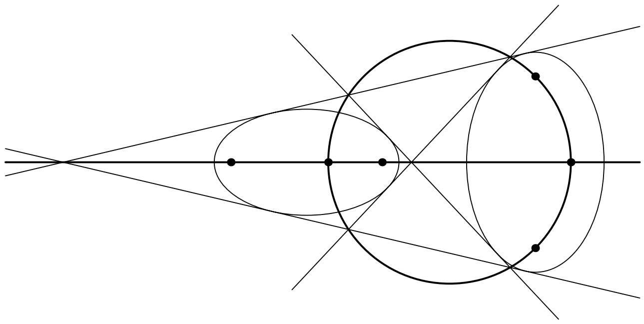

Рис. 12.

В случае, если такая окружность одна, то полученная кубика будет так называемой строфоидой — образом равносторонней гиперболы при инверсии с центром на ней [4]. А именно, пусть четыре прямые касаются нашей окружности в точках A, B, C и D. Тогда середины всех отрезков с концами в этих точках, точки пересечения прямых, проходящих через пары точек (исключая, конечно, сами точки), а также центр самой окружности лежат на равносторонней гиперболе (см. [1]). Причем ее асимптоты будут параллельны биссектрисам угла, образованного прямыми AB и CD (или любой другой аналогичной парой, что, как известно, не важно, рис. 13).

Достаточно показать, что инверсные образы этих точек относительно описанной окружности лежат на кубике фокусов, а инверсный образ точки Микеля четырех прямых лежит на нашей гиперболе. Действительно, расположим начало координат в центре инверсии. Тогда коника, проходящая через этот центр и отличная от окружности, будет задаваться уравнением $P_2(x,y) + P_1(x,y) = 0$, где P_1, P_2 — однородные многочлены, соответственно, первой и второй степени. При инверсии относительно единичной окружности эта коника перейдет в кривую третьего порядка

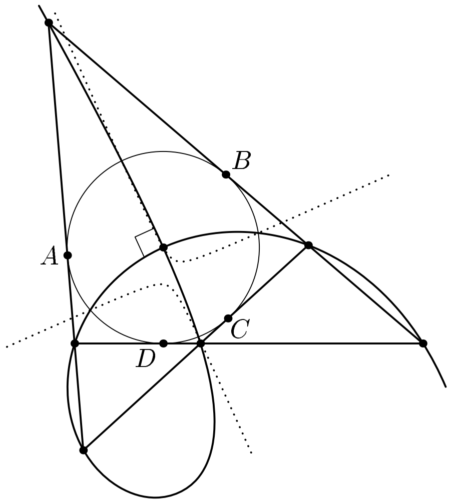

Рис. 13.

$P_2(x,y) + P_1(x,y)(x^2+y^2) = 0$. Надо доказать, что эта кривая имеет с кубикой фокусов 10 общих точек и, следовательно, они совпадают.

Для доказательства воспользуемся леммой, которая интересна сама по себе и относится к пучкам, не обязательно содержащим окружность.

Лемма 2. *Пусть дан четырехсторонник, образованный прямыми l_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда проекция точки пересечения двух диагоналей на третью лежит на нашей кубике.*

Доказательство. Для удобства рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 14. Условие, что проекции точки Q на стороны четырехугольника лежат на одной окружности, равносильно тому, что $\angle AQE = \angle CQF$. Для доказательства последнего достаточно доказать, что прямые AC, QE, QP и QF образуют гармоническую четверку.

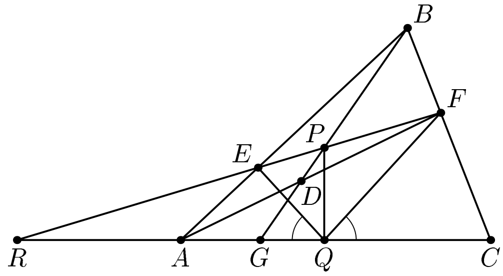

Рис. 14.

Последнее равносильно гармоничности четырех точек E, P, F, R (где R — точка пересечения EF и AC). А это равносильно гармоничности точек A, G, C, R (G — точка пересечения AC и BP). Это хорошо известный факт, который легко получить, записав теорему Чевы для треугольника ABC и точки D, а также теорему Менелая для треугольника ABC и прямой EF.

Вернемся теперь к инверсному образу гиперболы. Легко понять, что именно в точки, указанные в лемме, перейдут точки пересечения диагоналей при инверсии. Середины отрезков переходят в точки пересечения касательных в их концах. Так мы уже нашли 9 точек. Осталось разобраться с образом точки Микеля, которая, как было сказано выше, лежит на кубике фокусов (см. вывод уравнения кубики).

Рассмотрим окружности, описанные вокруг четырех треугольников четырехсторонника, образованного касательными в точках A, B, C и D, которые пересекаются в точке Микеля. Образы этих окружностей при инверсии перейдут в окружности девяти точек треугольников ABC, ABD, ACD и BCD. Заметим, что серединный треугольник треугольника ABC при симметрии относительно центра тяжести $ABCD$ переходит в треугольник, образованный серединами отрезков DA, DB, DC, описанная окружность которого проходит через центр окружности $ABCD$. Следовательно, все четыре окружности девяти точек проходят через точку, симметричную центру окружности относительно центра тяжести четырехугольника $ABCD$. Этот центр тяжести является центром рассматриваемой равносторонней гиперболы, так делит пополам более одной ее хорды. А значит, общая точка окружностей, являющаяся образом точки Микеля, лежит на гиперболе.

Как следствие, можно отметить, что касательные к кубике фокусов в центре окружности двойственного пучка перпендикулярны. Действительно, касательные к строфоиде в двойной точке являются полярами относительно окружности бесконечно удаленных точек гиперболы. Так как гипербола равносторонняя, эти поляры перпендикулярны.

Изогональное сопряжение в многоугольниках

Рассмотрим теперь пятиугольник. Известно, что существует единственная коника, касающаяся его сторон. Фокусы этой коники образуют единственную пару изогонально сопряженных относительно пятиугольника точек. Если вписанная коника — окружность, эти точки совпадают. Если обе точки конечны, то их проекции на стороны пятиугольника лежат на одной окружности. Если же одна из точек бесконечно удаленная, т. е. вписанная коника — парабола, то проекции фокуса этой параболы на стороны лежат на одной прямой.

Для многоугольника с числом сторон, бо́льшим 5, изогонально сопряженных точек в общем случае не существует. Исключением является многоугольник, стороны которого касаются некоторой коники. Для такого многоугольника, как и для пятиугольника, существует единственная пара изогонально сопряженных точек — фокусы вписанной коники.

Список литературы

[1] Акопян А. В., Заславский А. А. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. В печати.

[2] Берже М. *Геометрия*. М.: Мир, 1984.

[3] Заславский А. А. *Геометрические преобразования*. М.: МЦНМО, 2003.

[4] Руинский А. *Инверсии равносторонней гиперболы* // Математическое просвещение. Третья Серия. Вып. 4. 2000. С. 120–126.

[5] Уокер Р. *Алгебраические кривые*. ИЛ, 1952.

А. А. Заславский — ЦЭМИ
А. В. Акопян