

Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби

М. Б. Скопенков*

Цель данной статьи — подробно познакомить читателей с красивой идеей академика В. И. Арнольда о связи теоремы о высотах треугольника с тождеством Якоби [1]. Основное отличие нашей статьи от статьи В. И. Арнольда в том, что мы имеем дело в основном со сферической геометрией, а не с геометрией Лобачевского, и это делает основную идею более понятной. В частности, большая часть нашей статьи доступна школьнику-старшекласснику. При этом нужно иметь в виду, что можно единообразно доказать теорему о высотах в сферической геометрии и в геометрии Лобачевского.

Мы расскажем о двух интересных применениях идеи В. И. Арнольда — двух обобщениях теоремы о высотах треугольника.

Первый результат — это обобщение теоремы о высотах на криволинейные треугольники. *Криволинейным треугольником* мы называем фигуру, составленную из трех дуг окружностей a , b и c (рис. 1а). *Высотой* h_a криволинейного треугольника мы называем окружность, проходящую через обе точки пересечения окружностей b и c , перпендикулярную окружности a (смотри рисунок 1б). Аналогично определяются две другие высоты h_b и h_c . (Мы исключаем из рассмотрения криволинейные треугольники с двумя прямыми углами.)

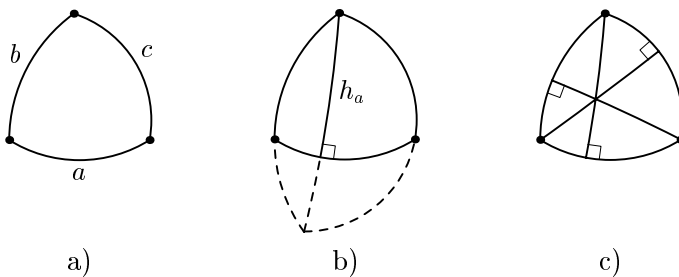


Рис. 1.

* Автор частично поддержан грантами РФФИ №05-01-00993 и №06-01-72551.

ТЕОРЕМА О ВЫСОТАХ КРИВОЛИНЕЙНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА¹⁾. Если две высоты криволинейного треугольника пересекаются в некоторой точке, то и третья высота проходит через эту точку (см. рис. 1с).

Эта теорема переходит в классическую теорему о высотах треугольника, если радиусы окружностей a , b и c увеличивать неограниченно.

Второй результат — это обобщение теоремы о высотах на случай трехмерного пространства:

ТЕОРЕМА ПЕТЕРСЕНА – МОРЛИ. Пусть a , b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c . Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c'' . Тогда три прямые a'' , b'' и c'' имеют один общий перпендикуляр (т. е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

Эта теорема превращается в теорему о высотах треугольника, если прямые a , b и c лежат в одной плоскости. Теорема Петерсена – Морли — трудная теорема стереометрии, и одна из наших основных целей — рассказать ее доказательство.

Идея В. И. Арнольда наиболее явно проявляется в сферической геометрии, поэтому мы начнем со знакомства с *геометрией на сфере*.

Не следует думать, что геометрия на сфере сложнее геометрии на плоскости. Напротив, оказывается, во многом эта геометрия устроена проще! Многие известные теоремы, например, теоремы синусов и косинусов, были открыты в сферической геометрии раньше, чем в планиметрии (поскольку они были необходимы для приложений в астрономии).

СЮЖЕТ ПЕРВЫЙ. СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного пространства. Назовем *большой окружностью* (сферической *прямой*) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O .

Каждому ненулевому вектору пространства можно сопоставить два объекта сферической геометрии: точку на сфере и большую окружность.

¹⁾Эта элегантная формулировка теоремы о высотах треугольника в неевклидовой геометрии была найдена участником Летней конференции Турнира Городов А. Мафусаловым.

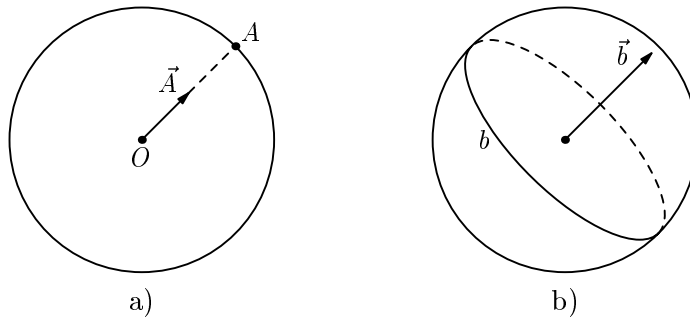


Рис. 2.

А именно, вектору можно сопоставить точку пересечения сферы с лучом, исходящим из точки O в направлении данного вектора (рис. 2а), и можно сопоставить сечение сферы плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной этому вектору (рис. 2б).

Будем обозначать точки на сфере большими буквами, сферические прямые — маленькими. Точку (сферическую прямую), соответствующую данному вектору, будем обозначать той же буквой, что и сам вектор, только без значка вектора. Например, если \vec{A} и \vec{b} — два вектора, то A обозначает точку, соответствующую вектору \vec{A} , а b обозначает сферическую прямую, соответствующую вектору \vec{b} .

Исследуем простейшие свойства построенных соответствий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. (Рисунок 3а) Если векторы \vec{A} и \vec{b} перпендикулярны, то точка A лежит на сферической прямой b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, проведем из точки O луч в направлении вектора \vec{A} . По нашему определению, точка A — точка пересечения нашего луча со сферой. Проведем через точку O плоскость, перпендикулярную вектору \vec{b} . По нашему определению, сферическая прямая b — сечение сферы нашей плоскостью. Поскольку \vec{A} и \vec{b} перпендикулярны, то построенный луч лежит в нашей плоскости. Поэтому точка A лежит на сферической прямой b , что и требовалось.

Будем обозначать через $[\vec{A}, \vec{B}]$ векторное произведение двух векторов \vec{A} и \vec{B} . Напомним, что *векторное произведение* двух векторов \vec{A} и \vec{B} — это вектор, перпендикулярный данным векторам и равный по модулю площади натянутого на них параллелограмма. Направление этого вектора определяется правилом правой руки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. (Рисунок 3б) Вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B .

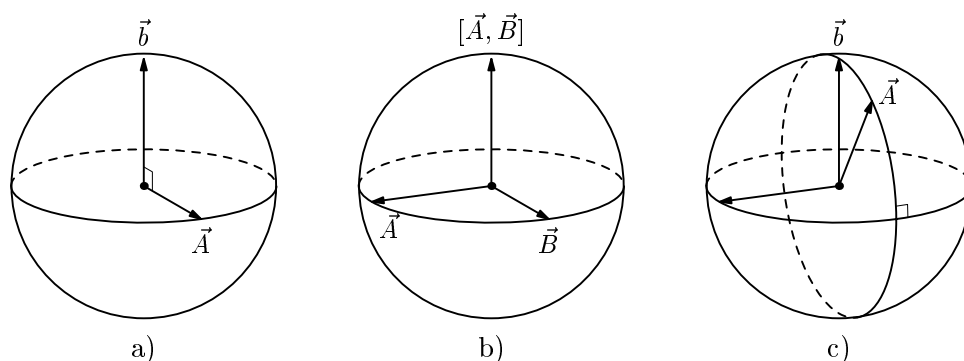


Рис. 3.

Действительно, вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ перпендикулярен обоим векторам \vec{A} и \vec{B} . Поэтому согласно утверждению 1 обе точки A и B лежат на сферической прямой, соответствующей вектору $[\vec{A}, \vec{B}]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. (Рисунок 3с) Вектор $[\vec{A}, \vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую b .

Действительно, пусть вектору $[\vec{A}, \vec{b}]$ соответствует сферическая прямая c . Поскольку этот вектор перпендикулярен вектору \vec{A} , то согласно утверждению 1 сферическая прямая c проходит через точку A . А поскольку он перпендикулярен \vec{b} , то сферическая прямая c перпендикулярна сферической прямой b . Иными словами, c — перпендикуляр, опущенный из точки A на сферическую прямую b .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. (Рисунок 4) Если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, то три сферические прямые a , b и c пересекаются в одной точке.

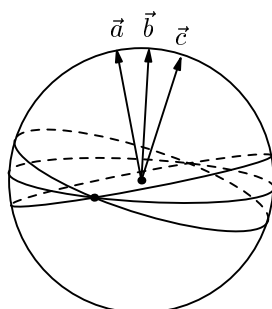


Рис. 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ следует, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} параллельны некоторой плоскости. Рассмотрим вектор \vec{P} , перпендикулярный этой плоскости. Применяя утверждение 1, получим, что точка P лежит на всех трех сферических прямых a , b и c .

Теперь мы готовы к выводу более содержательных результатов. Для любых трех векторов трехмерного пространства выполняется *тождество Якоби*:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] + [\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]] + [\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]] = 0.$$

Это тождество позволяет без всяких усилий получить следующую неочевидную теорему:

ТЕОРЕМА 5. Высоты треугольника на сфере пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} — три вектора, соответствующие вершинам треугольника на сфере. Согласно утверждению 2 вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через точки A и B . Тогда согласно утверждению 3 вектор $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]]$ соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую BC , т. е. сферической прямой, содержащей высоту h_A треугольника ABC . Аналогично векторы $[\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]]$ и $[\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]]$ соответствуют сферическим прямым, содержащим две другие высоты треугольника ABC . Поэтому тождество Якоби, ввиду утверждения 4, означает, что построенные три прямые пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Пользуясь этим методом, геометрические теоремы можно буквально «считывать» с алгебраических тождеств — в конце статьи мы приводим несколько задач на эту тему.

Легко видеть, что теорема 5 является частным случаем теоремы о высотах криволинейного треугольника (на сфере). Ее можно доказать и проще: при центральной проекции из центра сферы на плоскость, касающуюся сферы в одной из вершин треугольника, теорема 5 переходит в обычную теорему о высотах.

Тождество Якоби позволяет также доказать следующее ослабление теоремы Петерсена – Морли: *прямые a'' , b'' и c'' параллельны одной плоскости*. Для доказательства достаточно записать тождество Якоби для векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , параллельных исходным прямым a , b и c .

Вот еще одно элементарное применение тождества Якоби: для любых четырех точек O , A , B и C на плоскости выполняется равенство $\vec{OA} \cdot S(\triangle BOC) + \vec{OB} \cdot S(\triangle COA) + \vec{OC} \cdot S(\triangle AOB) = 0$.

О применении тождества Якоби в теории узлов можно прочесть в [4].

Следующие два сюжета не опираются друг на друга и их можно читать независимо. Сюжет второй посвящен доказательству теоремы о

высотах криволинейного треугольника, а сюжет третий — доказательству теоремы Петерсена – Морли.

СЮЖЕТ ВТОРОЙ. ОКРУЖНОСТИ

Назовем *окружностью* сечение сферы произвольной плоскостью, не обязательно проходящей через центр сферы. Точка на сфере и сферическая прямая — частные случаи окружности.

Окружность на сфере можно задать уравнением

$$(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha,$$

где \vec{A} — фиксированный вектор, α — фиксированное число, а \vec{X} — радиус-вектор переменной точки на сфере. Это уравнение задает сечение сферы плоскостью, перпендикулярной вектору \vec{A} и находящейся на расстоянии $\alpha/|\vec{A}|$ от начала координат.

В частности, если $\alpha = 0$, то наша окружность является большой окружностью сферы, а если $\alpha = |\vec{A}|$, то она вырождается в точку.

Следующее свойство уравнений окружностей почти очевидно:

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ пересекаются, то окружность $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{X}) = \alpha + \beta$ проходит через обе их точки пересечения.

Действительно, пусть \vec{X} — радиус-вектор одной из точек пересечения первых двух окружностей. Тогда по определению $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$. Складывая эти равенства, получим $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{X}) = \alpha + \beta$, то есть третья окружность тоже проходит через точку X .

На языке наших уравнений легко выразить также условие перпендикулярности двух окружностей:

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что окружности $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$ и $(\vec{B}, \vec{X}) = \beta$ перпендикулярны. Пусть \vec{X} — радиус-вектор одной из точек пересечения этих окружностей. Тогда векторы $[\vec{A}, \vec{X}]$ и $[\vec{X}, \vec{B}]$ параллельны касательным к окружностям A и B в этой точке. Рассмотрим тождество

$$([\vec{A}, \vec{X}], [\vec{X}, \vec{B}]) = (\vec{A}, \vec{X})(\vec{B}, \vec{X}) - (\vec{A}, \vec{B})(\vec{X}, \vec{X}).$$

Его левая часть равна нулю в силу перпендикулярности окружностей A и B , а правая часть в точности равна $\alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B})$. Тем самым в одну сторону нужное утверждение доказано. Обратное утверждение доказывается от противного.

Это утверждение является мотивировкой для следующего определения.

Рассмотрим множество пар вида $(\alpha; \vec{A})$, где α — действительное число, а \vec{A} — вектор трехмерного пространства. Скалярным произведением двух таких пар $\mathcal{A} = (\alpha; \vec{A})$ и $\mathcal{B} = (\beta; \vec{B})$ назовем число $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \alpha\beta - (\vec{A}, \vec{B})$.

Определим сложение пар и умножение пары на число покомпонентно: $\mathcal{A} + \mathcal{B} := (\alpha + \beta; \vec{A} + \vec{B})$, $\lambda\mathcal{A} := (\lambda\alpha; \lambda\vec{A})$.

Будем обозначать окружность, задаваемую уравнением $(\vec{A}, \vec{X}) = \alpha$, той же буквой, что и саму пару $(\alpha; \vec{A})$.

Оказывается, введенных операций достаточно, чтобы получить уравнение высоты криволинейного треугольника исходя из уравнений его сторон:

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пары $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ соответствует высота h_A криволинейного треугольника, составленного из дуг окружностей \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пара $\mathcal{H} = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ является линейной комбинацией пар \mathcal{B} и \mathcal{C} , то согласно утверждению 6 соответствующая ей окружность \mathcal{H} проходит через обе точки пересечения окружностей \mathcal{B} и \mathcal{C} . А поскольку

$$(\mathcal{H}, \mathcal{A}) = (\mathcal{B}, \mathcal{A})(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - (\mathcal{C}, \mathcal{A})(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0,$$

то согласно утверждению 7 окружность \mathcal{H} перпендикулярна окружности \mathcal{A} . То есть, по определению, \mathcal{H} — высота сферического треугольника, составленного из дуг окружностей \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} .

В случае, когда \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} — большие окружности сферы, это утверждение согласуется с формулой из предыдущего сюжета, ввиду замечательного тождества $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$.

Теперь мы готовы доказать теорему о высотах криволинейного треугольника на сфере. Действительно, пусть наш треугольник составлен из дуг окружностей \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} , не обязательно больших. Согласно утверждению 8 паре $\mathcal{H}_A = \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) - \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и двум аналогично определяемым парам \mathcal{H}_B и \mathcal{H}_C соответствуют высоты этого треугольника. Предположим, что \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B пересекаются. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{H}_C = -\mathcal{H}_A - \mathcal{H}_B$, поэтому ввиду утверждения 6 высота \mathcal{H}_C проходит через точку пересечения высот \mathcal{H}_A и \mathcal{H}_B , что и требовалось.

Теорема о высотах криволинейного треугольника на плоскости легко сводится к теореме о высотах криволинейного треугольника на сфере, если радиус сферы увеличивать неограниченно.

Определенный нами объект (множество пар с операциями сложения, умножения на число и скалярного произведения) называется пространством Минковского и играет фундаментальную роль в теории относительности [2].

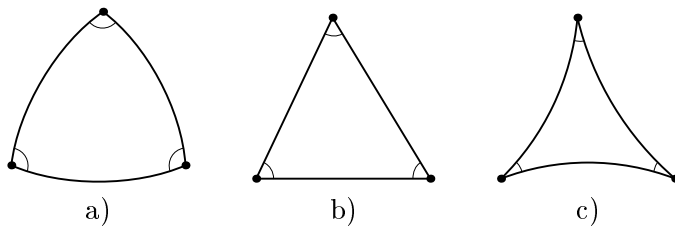


Рис. 5.

В действительности для доказательства теоремы о высотах криволинейного треугольника достаточно результатов только первого сюжета.

А именно, рассмотрим следующие 3 случая:

СЛУЧАЙ 1. Сумма углов криволинейного треугольника больше 2π (рисунок 5а). В этом случае наша теорема сводится к теореме 5. Для этого нужно сделать стереографическую проекцию на сферу подходящего радиуса, касающуюся плоскости в радикальном центре трех окружностей a , b и c .

СЛУЧАЙ 2. Сумма углов криволинейного треугольника равна 2π (рисунок 5б). Легко видеть, что тогда окружности a , b и c пересекаются в одной точке. Наша теорема сводится к обычной теореме о высотах с помощью инверсии с центром в этой точке.

СЛУЧАЙ 3. Сумма углов криволинейного треугольника меньше 2π (рисунок 5в). Тогда существует окружность d , перпендикулярная всем трем окружностям a , b и c . Наша теорема есть в точности теорема о высотах в геометрии Лобачевского, сформулированная в модели Пуанкаре (в которой d — абсолют). Теорему о высотах в геометрии Лобачевского можно получить аналогично первому сюжету, исходя из тождества Якоби для векторного произведения $[\vec{A}, \vec{B}] := *(\vec{A} \wedge \vec{B})$ в псевдоевклидовом пространстве [1].

СЮЖЕТ ТРЕТИЙ. ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u, x] = v.$$

Здесь u и v — фиксированные векторы, а x — радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u = AB$, $v = [OA, OB]$.

Вектор u для данной прямой имеет простой геометрический смысл — это направляющий вектор данной прямой. Отсюда, в частности, следует, что если прямая $[u, x] = v$ перпендикулярна прямой $[u', x] = v'$, то $(u, u') = 0$.

Оказывается, условие пересечения прямых тоже легко можно выразить на языке их уравнений:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u, v') + (v, u') = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение в одну сторону. Пусть наши прямые пересекаются в некоторой точке с радиус-вектором x . Тогда $(u, v') + (v, u') = (u, [u', x]) + ([u, x], u') = 0$ в силу известного тождества.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть $(u, v') + (v, u') = 0$. Выберем произвольную точку x на первой прямой и точку x' на второй. Тогда $(u, v') + (v, u') = (u, [u', x']) + ([u, x], u') = (u, [u', x' - x])$ в силу все того же тождества. Значит, $(u, [u', x' - x]) = 0$. Это означает, что $x' - x = \lambda u + \lambda' u'$ для некоторых чисел λ и λ' . Тогда $x + \lambda u = x' - \lambda' u'$ — искомая точка пересечения наших прямых.

Наша основная цель — понять, как исходя из уравнений двух прямых получить уравнение их общего перпендикуляра. Иными словами, нам нужно найти такие векторы u'' и v'' , чтобы прямая $[u'', x] = v''$ пересекала прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ и была перпендикулярна им.

Ясно, что прямая с направляющим вектором $[u, u']$ перпендикулярна обоим нашим прямым. Положим $u'' = [u, u']$.

Оказывается, для вектора v'' тоже есть простая формула. В качестве вектора v'' нужно взять проекцию вектора $[u, v'] + [v, u']$ на плоскость, перпендикулярную вектору u'' . То, что прямая $[u'', x] = v''$ пересекает прямые $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$, проверяется с помощью утверждения 9.

Эта формула является мотивировкой для следующего определения.

Пусть $(u; v)$ и $(u'; v')$ — две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u''; v'')$, где $u'' = [u, u']$ и $v'' = [u, v'] + [v, u']$.

Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u; v) + (u'; v') = (u + u'; v + v')$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Одной из геометрических интерпретаций таких пар являются *скользящие векторы* [3].

Мы имеем естественное отображение из множества пар векторов в множество прямых в пространстве: паре $(u; v)$ ставится в соответствие прямая $[u, x] = \text{pr } v$, где $\text{pr } v$ — проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u . Фактически мы показали, что это отображение переводит произведение в общий перпендикуляр (строго говоря, только в случае, если $u \perp v$ и $u' \perp v'$, но к нему все сводится — при замене $v \rightarrow v + \lambda u$, $v' \rightarrow v' + \lambda' u'$ происходит замена $v'' \rightarrow v'' + (\lambda + \lambda')u$).

Приведем одно простое применение нашего соответствия: прямая $[u + u', x] = v + v'$ пересекает общий перпендикуляр к прямым $[u, x] = v$ и $[u', x] = v'$ (проверяется с помощью утверждения 9).

С помощью нашего соответствия получается также теорема Петерсена — Морли. Действительно, произведение пар векторов удовлетворяет

тождеству Якоби. Если посмотреть, что оно означает геометрически, получим теорему Петерсена – Морли.

Это доказательство можно пересказать на более научном языке. Дело в том, что тот объект, который мы определили (пары векторов с операцией умножения) — это в действительности алгебра Ли группы движений трехмерного пространства. По теореме Шаля любое собственное движение трехмерного пространства — это винтовое движение вдоль некоторой прямой либо параллельный перенос. Сопоставим каждому бесконечно малому движению, то есть элементу алгебры Ли группы движений трехмерного пространства, такую прямую. Ключевой факт: коммутатор при таком соответствии переходит в общий перпендикуляр. Это следует из того, что прямая, соответствующая коммутатору, должна быть неподвижна при любой симметрии, меняющей местами прямые, соответствующие исходным элементам. Теперь теорема Петерсена – Морли непосредственно получается из тождества Якоби.

В таком виде доказательство проходит без существенных изменений и для пространства Лобачевского — теорема Петерсена – Морли оказывается справедливой и в неевклидовом пространстве [5].

ЗАДАЧИ

Во всех задачах предполагается, что \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} — единичные векторы, идущие в вершины сферического треугольника ABC из центра сферы. Через AB , BC и CA обозначаются длины сторон треугольника, то есть длины дуг соответствующих больших окружностей.

1. Рассматривая вектор $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, докажите, что медианы треугольника на сфере пересекаются в одной точке.
2. С помощью тождества $([\vec{A}, \vec{B}], [\vec{B}, \vec{C}]) = (\vec{A}, \vec{B})(\vec{B}, \vec{C}) - (\vec{A}, \vec{C})(\vec{B}, \vec{B})$ получите сферическую теорему косинусов:

$$\sin AB \sin BC \cos \angle ABC = \cos AB \cos BC - \cos AC.$$

3. С помощью тождества $([\vec{A}, \vec{B}], \vec{C}) = ([\vec{B}, \vec{C}], \vec{A}) = ([\vec{C}, \vec{A}], \vec{B})$ докажите сферическую теорему синусов:

$$\frac{\sin AB}{\sin \angle ACB} = \frac{\sin BC}{\sin \angle BAC} = \frac{\sin CA}{\sin \angle CBA}.$$

4. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисах криволинейного треугольника на плоскости.

Благодарности. Автор благодарен В. Прасолову за помощь в подготовке данной статьи, В. Арнольду за важные замечания, В. Дремову, которому принадлежит множество ценных идей, реализованных в данном цикле задач, а также А. Канелю, О. Карпенкову, И. Лосеву и А. Скопенкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. *Теорема о высотах треугольника в геометрии Лобачевского как тождество Якоби в алгебре Ли квадратичных форм на симплектической плоскости* // Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005. С. 93–99.
- [2] Берже М. *Геометрия*. М: Мир, 1984.
- [3] Соловьев Ю. П., Сосинский А. Б. *Геометрия скользящих векторов* // Квант №8, 1985. С. 9–17.
- [4] Conant J., Schneiderman R., Teichner P. *Jacobi identities in low-dimensional topology*. To appear in *Compositio Mathematica*, 2007.
- [5] Fenchel W. *Elementary geometry in hyperbolic space*. WdeG, 1989.