Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта*

С. Б. Гашков

Пусть M_n — выпуклый n-угольник, p_n — его периметр, d_n — диаметр, b_n — ширина, R_n — минимальный радиус содержащего его круга (радиус Юнга), r_n — максимальный радиус лежащего в нем круга (радиус Бляшке), s_n — квадратный корень из его площади. Определения диаметра, ширины и обоих радиусов можно найти, например в [1], [2]. Справедливы следующие неравенства (индекс n опускаем), некоторые из которых также можно найти в [1], [2].

	r	R	b	d	s	p
r		$\frac{r}{R} > 0$	$\frac{r}{b} \geqslant \frac{1}{3}$	$\frac{r}{d} > 0$	$\frac{r}{s} > 0$	$\frac{r}{s} > 0$
R	$\frac{r}{R} \leqslant \cos\frac{\pi}{n}$		$\frac{b}{R} \leqslant \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}$	$\frac{d}{R} \leqslant 2$	$\frac{s}{R} \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}$	$\frac{p}{R} > 4$
b	$\frac{b}{r} \geqslant 2$	$\frac{b}{R} \geqslant 0$		$\frac{b}{d} > 0$	$\frac{b}{s} > 0$	$\frac{b}{p} > 0$
d	$\frac{r}{d} \leqslant \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$	$\frac{R}{d} \leqslant \sqrt{3}$	$\frac{b}{d} \leqslant \cos\frac{\pi}{2n}$		$\frac{s}{d} \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}$	$\frac{p}{d} \leqslant 2n\sin\frac{\pi}{2n}$
s	$\frac{s}{r} \geqslant \sqrt{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$	$\frac{s}{R} > 0$	$\frac{b}{s} \leqslant 3^{1/4}$	$\frac{s}{d} > 0$		$\frac{s}{p} > 0$
p	$\frac{p}{r} \geqslant 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$	$\frac{p}{R} \leqslant 2n\sin\frac{\pi}{n}$	$\frac{p}{b} \geqslant 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$	$\frac{p}{d} > 2$	$\frac{p}{s} \geqslant 2\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$	

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 05–01–0099, УР.04.02.528

Правое неравенство следующей теоремы было доказано в 1922 г. К. Рейнхардтом [3]. Здесь приводится более простое доказательство.

Теорема 1. *Пусть p периметр, b ширина и d диаметр выпуклого n-угольника M. Тогда справедливы неравенства*

$$2nb\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \leqslant p \leqslant 2nd\sin\frac{\pi}{2n}\,.$$

Каждое из неравенств точное, если $n \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть M^* — симметризация Минковского n-угольника M, т.е.

$$M^* = \frac{1}{2}(M + (-M)) = \{(x-y)/2 : x, y \in M\}$$

(все необходимые свойства этой операции можно найти в [2]). Тогда M^* есть центрально-симметричный выпуклый $2m$-угольник, где $m \leqslant n$, с теми же периметром, диаметром и шириной, что и у M. Из центральной симметричности M^* следует, что его внутренний радиус $r^* = b/2$ и внешний радиус $R^* = d/2$. Из неравенства

$$2nr\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \leqslant p \leqslant 2nR\sin\frac{\pi}{n}$$

следует, что последовательность $n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ строго монотонно убывает, а последовательность $n\sin\frac{\pi}{n}$ строго монотонно возрастает. Поэтому

$$\begin{aligned} 2nb\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} &\leqslant \\ &\leqslant 2mb\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m} = 4mr^*\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m} \leqslant p \leqslant 4mR^*\sin\frac{\pi}{2m} = 2md\sin\frac{\pi}{2m} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant 2nd\sin\frac{\pi}{2n}\,, \end{aligned}$$

причем равенства $p = 2nb\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, $p = 2nd\sin\frac{\pi}{2n}$ лишь тогда справедливы, когда M^* есть правильный $2n$-угольник.

Очевидно, для правильного n-угольника при нечетном n справедливы равенства $p = 2nb\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = 2nd\sin\frac{\pi}{2n}$, а при четном n ни одно из них не верно. Однако при четном n, не равном степени двойки, указанные равенства могут достигаться.

Примеры n-угольников, для которых они достигаются, можно построить следующим образом. Представим n произвольным образом в виде $m(2k+1)$. Очевидно, что если $n = 2^s n_0$, где n_0 — нечетно, то число представлений в виде $n = m(2k+1)$ будет равно $\tau(n_0)$ — числу всех различных делителей числа n_0. Возьмем правильный $(2k+1)$-угольник с диаметром (наибольшей диагональю) d и с центром в каждой его вершине построим круг радиуса d. Очевидно, он будет проходить через концы противолежащей к данной вершине стороны $(2k+1)$-угольника, которая будет его хордой, отсекающей от него сегмент, соприкасающийся извне с $(2k+1)$-угольником по этой стороне. Рассмотрим выпуклую фигуру, являющуюся пересечением построенных кругов. Очевидно, она будет получаться объединением $(2k+1)$-угольника с указанными сегментами. Назовем ее правильным $(2k+1)$-угольником Рело. Диаметром этой фигуры по прежнему будет d, а периметр будет равен сумме дуг построенных кругов, т.е. πd, так как сложив эти дуги вместе, получим половину окружности радиуса d. Ширина этой фигуры во всех направлениях одинакова и равна d. Поэтому данная фигура является примером фигуры постоянной ширины. Впишем в нее n-угольник с равными сторонами так, чтобы среди его вершин содержались все вершины рассматриваемого $(2k+1)$-угольника. Очевидно каждая из $2k+1$ упомянутых дуг при этом будет разбиваться на m равных дужек, хорды которых будут сторонами рассматриваемого n-угольника. Диаметр его будет очевидно d, а ширина равна $b = d\cos(\pi/2n)$ — высоте равнобедренного треугольника с ребром d и углом при вершине π/n. Тогда периметр, очевидно, равен $2nd\sin(\pi/2n) = 2b\operatorname{tg}(\pi/2n)$.

Следующая теорема была доказана в 1922 г. К. Рейнхардтом [3]. Здесь приводится более простое доказательство.

Теорема 2. *Пусть p периметр, s^2 площадь и d диаметр выпуклого n-угольника M. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{s}{d} \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}\,,$$

которое обращается в равенство только для правильных нечетноугольников.

Доказательство. Из неравенств

$$\frac{p}{s} \geqslant 2\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\,, \quad p \leqslant 2nd\sin\frac{\pi}{2n}$$

следует неравенство

$$\frac{s}{d} \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}\,,$$

которое, очевидно, обращается в равенство только когда оба неравенства обращаются в равенства. Но для второго из них это верно только в случае правильного n-угольника, а для первого из них в этом случае равенство возможно, лишь когда n нечетно.

В следующей теореме более подробно рассматривается случай обращения неравенств теоремы 1 в равенства.

Теорема 3. *Пусть $R(n)$ есть наибольшее число попарно не подобных n-угольников Рейнхардта, т. е. таких, что выполнены равенства*

$$2nb\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = p = 2nd\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Тогда

(i) $$R(n) = 0 \iff n = 2^k,\ k \in \mathbb{N};$$

для любого $n \in \mathbb{N}$

(ii) $$\frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m) - \mu(m)) \leqslant R(n) < \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}\varphi(m);$$

для $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$, где $p > 2$ — простое число,

(iii) $$\begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m) - \mu(m)) = \\ &= \frac{1}{2n}(2^{n/p}p + 2^{n/p^2}p(p-1) + \ldots + 2^{n/p^k}p^{k-1}(p-1)) \sim 2^{n/p}p/2n; \end{aligned}$$

(iv) $$R(n) = 1 \iff n = p \text{ или } n = 2p,\ p > 2,\ p \text{ — простое.}$$

Здесь $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $m \mid n$ — обозначение для отношения делимости натуральных чисел (определения см., например, в [4]).

Пункт (iv) дает следующую геометрическую характеризацию простых чисел: нечетное число n является простым, если и только если $R(n) = 1$, т.е. если существует единственный n-угольник Рейнхардта. Аналогично получается и вторая характеризация: нечетное число n является простым если и только если $R(2n) = 1$, т.е. если существует единственный $2n$-угольник Рейнхардта.

Доказательство. Пусть M такой n-угольник, что M^* — правильный $2n$-угольник. Ориентируем все стороны многоугольника M^* в одном направлении и сопоставим им вектора, изображающие комплексные корни $2n$-й степени из единицы $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{2n-1}$, где $\varepsilon = \exp\frac{i\pi}{n}$. Ясно, что $-\varepsilon^j = \varepsilon^{n+j}$. Тогда сторонам n-угольника M однозначно сопоставляется n-элементное множество, также обозначаемое M, лежащее в группе корней из единицы $W_{2n} = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{2n-1}\}$. Если расположить векторы этого множества в определенном порядке так, чтобы начало очередного вектора совпало с концом предыдущего, то они будут ограничивать n-угольник, подобный n-угольнику M. Если расположить векторы аналогичным образом, но в противоположном порядке, получится многоугольник, симметричный предыдущему относительно некоторой прямой. Естественно, центрально-симметричному многоугольнику $(-M)$ соответствует множество $(-M)$ такое, что $M \cap (-M) = \varnothing$. Ясно, что условия $M \cap (-M) = \varnothing$ и $M \cup (-M) = W_{2n}$ равносильны. Они равносильны также тому, что в каждой паре противоположных векторов $\{\varepsilon^j, -\varepsilon^j\}$ один принадлежит M, а другой принадлежит $-M$. Также очевидно, что

$$\sum_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^j = 0,$$

так как сумма векторов, в которые превращаются ориентированные в одном направлении стороны многоугольника, равна нулю. Расположение векторов в любом другом порядке, хотя и имеет всегда сумму, равную нулю, приводит к невыпуклому или самопересекающемуся многоугольнику.

Обозначим через A_n множество

$$\{M : M \subset W_{2n},\ |M| = n,\ M \cap (-M) = \varnothing\}$$

(здесь и далее $|M|$ обозначает число элементов множества M).

Так как из каждой пары $\{\varepsilon^j, -\varepsilon^j\}$ только один элемент принадлежит M, то $|A_n|$ равно 2^n. Обозначим через A_n^* подмножество A_n, состоящее из таких множеств M, для которых сумма входящих в них векторов равна нулю. Обозначим $A_{n,m}$ подмножество

$$\{M : M \in A_n,\ |\operatorname{Aut} M| = m\},$$

где группа $\operatorname{Aut} M = \{w : w \in W_{2n},\ M = Mw\}$. С геометрической точки зрения $\operatorname{Aut} M$ есть группа вращений, переводящих множество M в себя. Если $|\operatorname{Aut} M| = m$, то $m \mid 2n$ и эта группа

$$\operatorname{Aut} M = \{1, \varepsilon^{2n/m}, \varepsilon^{4n/m}, \ldots, \varepsilon^{2n-2n/m}\},$$

т. е. состоит из поворотов на углы $2k\pi n/m$, $k = 0, \ldots, m-1$ (поворот на нулевой угол — это тождественное преобразование). Так как множество $M \in A_{n,m}$, $m > 1$ переходит в себя при нетривиальном повороте вокруг начала координат, то сумма его векторов равна нулю, иначе бы она изменялась при этом повороте. Алгебраическое доказательство этого также умещается в несколько строк. Действительно, если $M \in A_{n,m}$, $m > 1$, $x \in \operatorname{Aut} M$, $x \neq 1$, тогда

$$\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = \sum_{x\varepsilon^j \in M} x\varepsilon^j = x \sum_{x\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = x \sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j,$$

следовательно

$$(1 - x) \sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0, \quad \sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0,$$

поэтому

$$\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0$$

и $M \in A_n^*$. Значит $A_{n,m}$ содержится в A_n^*, т. е. $A_{n,m}$ можно было определить равенством

$$\{M : M \in A_n^*,\ |\operatorname{Aut} M| = m\}.$$

Если m четное число, то $-1 = \varepsilon^{(2n/m)(m/2)} \in \operatorname{Aut} M$, т. е. указанная группа содержит поворот на 180 градусов (центральную симметрию), поэтому в этому случае $-M = M$. Но по условию это невозможно, так как $M \cap (-M) = \varnothing$ для $M \in A_{n,m}$, следовательно $A_{n,m} = \varnothing$ при четных m.

Если же m нечетно, делит n и $M \in A_{n,m}$, то рассмотрим подмножество

$$M_m = M \cap \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{\frac{2n}{m}-1}\}.$$

Ясно, что

$$|M_m| = n/m, \quad (-M)_m = \left(M_m + \frac{n}{m}\right) \bmod \frac{2n}{m}, \quad M_m \cap (-M)_m = \varnothing,$$

ведь

$$\varepsilon^{2n/m} M = M, \quad \varepsilon^{n/m} M = \varepsilon^{n/m} (\varepsilon^{2n/m})^{(m-1)/2} M = -M.$$

Удобно вместо множества

$$M_m = \{\varepsilon^{k_1}, \ldots, \varepsilon^{k_{n/m}}\}$$

рассматривать множество $M_m = \{\varepsilon^{mk_1}, \ldots, \varepsilon^{mk_{n/m}}\} \subset W_{2n/m}$. Тогда

$$|M_m| = n/m, \quad M_m \cap (-M)_m = \varnothing, \quad |\operatorname{Aut} M_m| = 1,$$

ведь из условия $|\operatorname{Aut} M_m| = k > 1$ следовало бы, что $|\operatorname{Aut} M| = mk > m$ в противоречии с условием $M \in A_{n,m}$. Поэтому $M_m \in A_{n/m,1}$. Указанное выше отображение $M \leftrightarrow M_m$ взаимно однозначно, поэтому справедливо равенство

$$|A_{n,m}| = \left|A_{n/m,1}\right|.$$

Следовательно

$$|A_n| = \sum_{2 \nmid m | n} |A_{n,m}| = \sum_{m | n_0} |A_{n,m}| = \sum_{m | n_0} \left|A_{n/m,1}\right|,$$

где n_0 максимальный нечетный делитель n, т. е. $n = n_0 2^s$, $s = 0, 1, \ldots$.

Если положить $f_k = |A_{kn/n_0}| = (2^k)^{n/n_0}$, $g_k = |A_{kn/n_0,1}|, k \in \mathbb{N}$, то для нечетных k получим, что

$$f_k = |A_{kn/n_0}| = \sum_{m|k} \left|A_{(kn/n_0)/m,1}\right| = \sum_{m|k} g_{k/m}\,.$$

Применяя преобразование Мёбиуса (см. [4]), имеем

$$g_k = \sum_{m|k} \mu(m) f_{k/m} = \sum_{m|k} \mu(m) (2^{k/m})^{n/n_0} = \sum_{m|k} \mu(m) 2^{kn/(mn_0)}$$

для нечетных k, следовательно

$$|A_{n,1}| = g_{n_0} = \sum_{m|n_0} 2^{n/m} \mu(m).$$

Любопытно, что если n нечетно, то

$$\frac{|A_{n,1}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{m|n} 2^{n/m} \mu(m)$$

равно числу неприводимых двоичных многочленов степени n (формулу для их числа см. в [4]). Известна также связь этого числа с количеством непериодических двухцветных ожерелий из n бусинок. Произвольное двухцветное ожерелье из n бусинок назовем n/k-периодическим, если его можно разрезать на k одинаковых подвесок. Ожерелья, которые не являются k-периодическими ни при каком k, назовем непериодическими и их количество обозначим I_n (ожерелья, получающиеся друг из друга вращением в содержащей их плоскости, считаем одинаковыми). Очевидно, что число ожерелий с минимальным периодом k равно I_k. Разрезая разными способами каждое из таких ожерелий, получаем k различных двухцветных ориентированных подвесок. Общее количество подвесок, полученных из всех ожерелий, равно с одной стороны

$$\sum_{d|n} dI_d \,,$$

а с другой стороны равно 2^n. Поэтому по формуле Мёбиуса (см. [4])

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{m|n} 2^{n/m} \mu(m).$$

Это число, очевидно, равно $|A_{n,1}|/n$ при нечетных n.

В [5, гл. 1, задача 27] доказано также, что число I_n при нечетных n равно числу подмножеств аддитивной циклической группы $\mathbb{Z}_n$, таких, что сумма элементов во множестве равна нулю.

Если для некоторого $w \in W_{2n}$ и двух n-элементных множеств $M_1, M \in A_n$ справедливо равенство $M_1 = Mw$ в группе W_{2n}, то эти множества назовем эквивалентными. Другими словами, два множества M и M_1 эквивалентны, если одно из них получается поворотом из другого. В частности, M и $-M$ эквивалентны. Очевидно, что если $M \in A_{n,m}$, и M_1 эквивалентно M, то $M_1 \in A_{n,m}$, поэтому множество $A_{n,m}$ распадается на непересекающиеся классы эквивалентности. Если $M \in A_{n,m}$, то число различных множеств, которые можно получить поворотами множества M, равно $2n/m$. Значит, в каждом классе $2n/m$ множеств и поэтому число классов эквивалентности в $A_{n,m}$ равно $|A_{n,m}|m/2n$. Геометрически любое разбиение W_{2n} на пару множеств M и $-M$ можно представить в виде ожерелья из равного количества черных и белых бусинок, в котором при повороте на 180 градусов меняются цвета всех бусинок. Если $M \in A_{n,m}$, то это ожерелье будет $2n/m$-периодическим. Эквивалентным множествам соответствуют ожерелья, получающиеся друг из друга вращениями. Если такие ожерелья считать одинаковыми, то каждому классу эквивалентности соответствует одно ожерелье и число классов эквивалентности равно числу различных ожерелий. Если множества M и M_1 эквивалентны, то соответствующие им многоугольники Рейнхардта получаются друг из друга поворотами, т. е. равны. Очевидно, что не эквивалентным множествам соответствуют не равные друг другу многоугольники Рейнхардта.

Ясно, что существует множество $M \in A_{n,1}$ со свойством $\sum\limits_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j \neq 0$ (например, множество $\{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$). Поэтому

$$R(n) < \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} \left|A_{n/m,1}\right| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} \sum_{k|n_0/m} 2^{n/mk} \mu(k),$$

так как $n/m = 2^s n_0/m$. Меняя порядок суммирования и подставляя $k = l/m$, имеем

$$R(n) < \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} = \sum_{m|l} m\mu(l/m) = \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} \varphi(l),$$

так как

$$\sum_{m|l} m\mu(l/m) = \varphi(l).$$

Так как разным ожерельям соответствуют разные n-угольники Рейнхардта, то

$$\begin{aligned} R(n) &\geqslant \\ &\geqslant \sum_{1<m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} - \frac{A_{n,1}}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{l|n_0} 2^{n/l} (\varphi(l) - \mu(l)) = \\ &\qquad = \frac{1}{2n} \sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m} (\varphi(m) - \mu(m)) \end{aligned}$$

и соотношения (ii) доказаны.

Заметим, что при нечетном n

$$\sum_{1<m|n_0} |A_{n,m}| \frac{m}{2n} = \sum_{1<m|n} |A_{n/m,1}| \frac{m}{2n}$$

равна половине числа всех периодических двухцветных ожерелий из n бусинок.

Пусть $n = 2^s p^k$, $s, k = 0, 1, \ldots$, где p — простое число, $M \in A_n$ и

$$\sum_{\varepsilon^j \in M} \varepsilon^j = 0.$$

Подставляя $-\varepsilon^{j-n}$ вместо ε^j при $j \geqslant n$ в предыдущее равенство, имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \varepsilon^j = 0,$$

где $\alpha_j = \pm 1$, $j = 0, \ldots, n-1$. При этом ясно, что

$$\alpha_j = 1 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon^j \in M, \quad \alpha_j = -1 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon^j \in (-M).$$

Пусть

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^j,$$

и f_{2n} есть полином деления круга (определение и свойства см. в [4]). Тогда $P(\varepsilon) = 0$, и так как f_{2n} минимальный полином для ε, то согласно свойству минимальных полиномов он будет делителем полинома $P(x)$. Если $p = 2$, то $n = 2^l$, следовательно $f_{2n} = x^n + 1$ и поэтому $f_{2n}(x)$ не может делить $P(x)$, так как степень $P(x)$ меньше n. Следовательно, $R(n) = 0$ и равенство (i) доказано.

Рассмотрим случай $p > 2$, $n = 2^s p^k$. Для круговых полиномов известны соотношения

$$f_p(x) = 1 + x + \ldots + x^{p-1}; \quad f_{2p}(x) = f_p(-x) = 1 - x + x^2 - \ldots + x^{p-1};$$
$$f_n(x) = f_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s}\left(x^{p_1^{r_1-1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s-1}}\right),$$

где $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$. Из них следует, что

$$f_{2n} = 1 - x^{n/p} + x^{2n/p} - \ldots + x^{n(1-1/p)}, \; n = 2^s p^k.$$

Так как

$$\frac{P(x)}{f_{2n}(x)} = \sum_{j=0}^{n/p-1} a_j x_j,$$

где a_j — целые числа, то

$$P(x) = f_{2n}(x)\frac{P(x)}{f_{2n}(x)} = f_{2n}(x)\sum_{j=0}^{n/p-1} a_j x_j = \sum_{j=0}^{n/p-1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k x^{\frac{n}{p}k+j}.$$

Отсюда следует, что последовательность α_j антипериодична с периодом n/p, т.е. $\alpha_{j+n/p} = -\alpha_j$, $j = 0,\ldots,n-1-n/p$. Так как

$$\alpha_j = 1 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon^j \in M, \quad \alpha_j = -1 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon^j \in (-M),$$

то

$$\varepsilon^j \in M \;\Leftrightarrow\; \varepsilon^{j+n/p} \in (-M),\; j = 0,\ldots,n-1-n/p,$$

следовательно $\varepsilon^j \in M \Leftrightarrow \varepsilon^{j+2n/p} \in M$, $j = 0,\ldots,2n-1$, ведь $\varepsilon^{j+n} = -\varepsilon^j$. Поэтому $\varepsilon^{2n/p} \in \operatorname{Aut} M$, $|\operatorname{Aut} M| > 1$, значит $M \notin A_{n,1}$ и множество $A_{n,1}$ пусто. Следовательно,

$$R(n) = \sum_{1<m|n_0} |A_{n,m}|\frac{m}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m)-\mu(m))$$

и равенство (iii) доказано. В частности, $R(n) = 1$, если $n = p$ или $n = 2p$, где $p > 2$ — простое число. Если $n = 2^s p$, $s \geqslant 2$, тогда согласно (iii)

$$R(n) = \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m)-\mu(m)) = \frac{1}{2n}2^{n/p}(\varphi(p)-\mu(p)) =$$
$$= \frac{1}{2^{s+1}}2^{2^s} = 2^{2^s-s-1} \geqslant 2,$$

так как $2^s \geqslant s+2$ для $s \geqslant 2$.

Если $1 < p \leqslant \sqrt{n}$ делит n, то для $n > 4$

$$R(n) \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m)-\mu(m)) > \frac{1}{2n}2^{n/p}(\varphi(p)-\mu(p)) =$$
$$= \frac{1}{2n}2^{n/p}(p-1+1) = \frac{p}{2n}2^{n/p} \geqslant 2^{\sqrt{n}-1}/\sqrt{n} \geqslant 1,$$

так как $2^x/x$ возрастающая функция при $x \geqslant 2$, и $2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$ при $n \geqslant 4$. Следовательно, $R(n) = 1$ только когда n простое число, и пункт (iv) доказан.

Доказанная теорема дает примеры многоугольников Рейнхардта, которые нельзя получить из правильных $(2k+1)$-угольников Рело. Это очевидно при сравнении полученных нижних оценок для $R(n)$ и оценки $\tau(n_0)$ числа n-угольников Рейнхардта – Рело. Если n не равно ни степени двойки, ни простому, ни удвоенному простому числу, то из доказанных неравенств следует асимптотическое неравенство $2^{n/p}p/2n \lesssim R(n)$, где p —

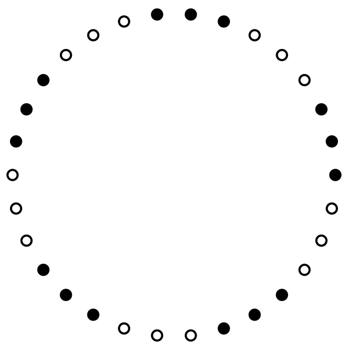

Рис. 1.

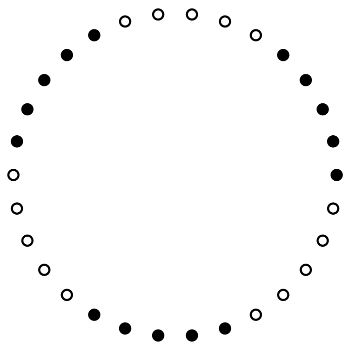

Рис. 2.

минимальный нечетный простой делитель n. Из него следует, что $\tau(n_0) \leqslant \leqslant \tau(n) \leqslant 2\sqrt{n} \lesssim 2^{\sqrt{n}-1}/\sqrt{n} \lesssim R(n)$, т.е. $R(n)$ в рассматриваемых случаях растет существенно быстрее $\tau(n)$. Минимальное значение n, при котором $R(n) > \tau(n_0)$, равно 15. В этом случае

$$R(15) \geqslant \frac{2^5 3 + 2^3 5 + 2(2 \cdot 4 - 1)}{30} = 5.$$

Из 5 этих 15-угольников один правильный и еще два нам уже известны как 15-угольники Рейнхардта – Рело, один из которых строится на базе 5-угольника, а другой — на базе треугольника Рело. Покажем для примера, как описанный в доказательстве метод позволяет построить еще два многоугольника Рейнхарда с нетривиальной группой вращений. Вначале рассмотрим случай, когда эта группа содержит 15 вращений. Тогда, очевидно, существует только правильный 15-угольник Рейнхардта. Если группа содержит 5 вращений, то соответствующее множество M может иметь только вид

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^6, \varepsilon^7, \varepsilon^8, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{18}, \varepsilon^{19}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{25}, \varepsilon^{26}\}$$

и соответствует 5-периодическому ожерелью, изображенному на рис. 1.

В рассматриваемом случае 15-угольник можно построить на базе пятиугольника Рело.

Если группа содержит 3 вращения, то множество M может совпадать с множеством

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{22}, \varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}\}$$

которое соответствует 3-периодическому ожерелью, изображенному на рис. 2.

В этом случае 15-угольник можно построить на базе треугольника Рело. Однако множество M можно выбрать еще двумя способами. Один

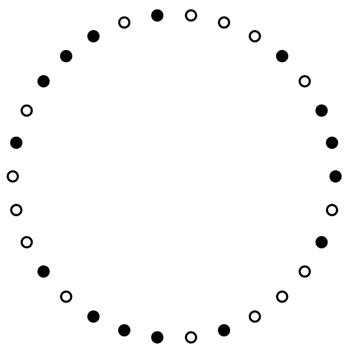

Рис. 3.

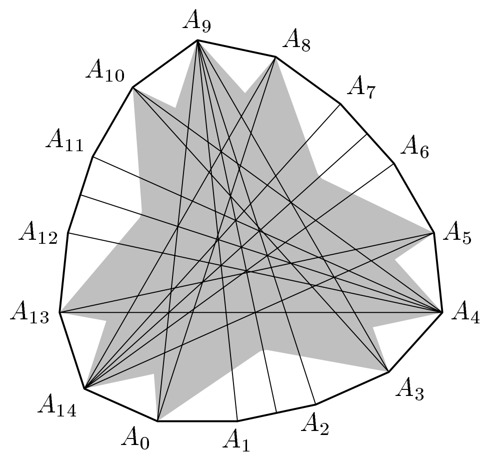

Рис. 4. *15-угольник Рейнхардта*

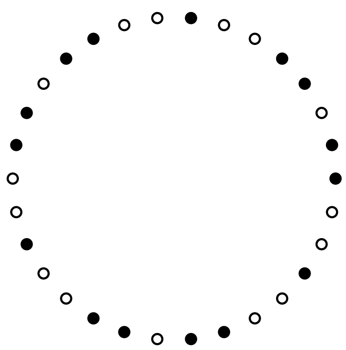

Рис. 5.

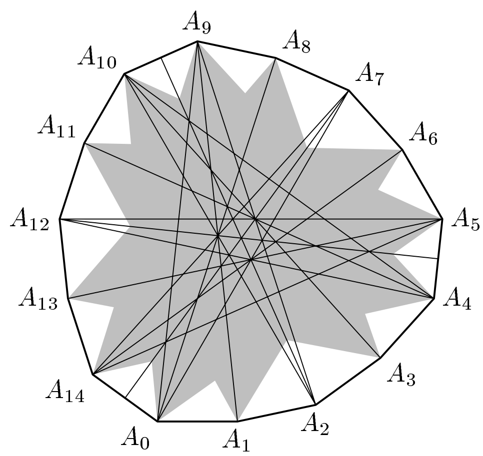

Рис. 6. *Другой 15-угольник Рейнхардта*

из них соответствует множеству

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{18}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{22}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{28}\},$$

которое изображается 3-периодическим ожерельем на рис. 3.

Соответствующий 15-угольник Рейнхардта изображен на рис. 4.

Во втором случае в качестве M выбирается множество

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^7, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^{17}, \varepsilon^{20}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{27}\},$$

которое изображается 3-периодическим ожерельем на рис. 5.

Соответствующий 15-угольник Рейнхардта изображен на рис. 6.

Список литературы

[1] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. М.: Наука, 1974.

[2] Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры*. М.: ГИТТЛ, 1951.

[3] Reinhardt K. *Extremal Polygone gegebenen Durchmessers* // Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 31, 1922. S. 251–270.

[4] Кострикин А. И. *Основные структруры алгебры*. М.: Физматлит, 2000.

[5] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. М.: Мир, 1990.

С. Б. Гашков, механико-математический факультет МГУ

Издательство МЦНМО

В. О. Бугаенко. **Обобщенная теорема Ван дер Вардена.** 2006. 12 с.

Брошюра адресована старшим школьникам и студентам младших курсов. Никаких предварительных знаний от читателя не требуется.

Н. Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. **Комбинаторика.** (Совместно с издательством «ФИМА».) 2006. 400 с.

В книге в популярной форме рассказывается о комбинаторике, методах решения комбинаторных задач, о рекуррентных соотношениях и производящих функциях. Книга будет полезна школьникам старших классов, интересующимся математикой, учителям, студентам первых курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также всем, сталкивающимся с комбинаторными задачами.

А. Ю. Зубов и др. **Олимпиады по криптографии и математике.** 2006. 136 с.

В сборник включены условия, ответы и решения пятнадцати олимпиад по криптографии и математике, проведенных в Москве с 1991 по 2005 гг. Для учащихся старших классов, учителей математики и информатики, а также студентов младших курсов, интересующихся вопросами информационной безопасности.

Московские олимпиады по информатике. Под ред. Е. В. Андреевой, В. М. Гуровица и В. А. Матюхина. 2006. 256 с.

Книга предназначена для школьников, учителей информатики, студентов и просто любителей решать задачи по программированию. Большинство задач приведены с подробными разборами и комментариями.

В. В. Прасолов. **Задачи по планиметрии.** 5-е изд. испр. и доп. (совместно с ОАО «Московские учебники») 2006. 640 с.

Ставший классическим сборник содержит около 1900 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятельного решения. 4-е издание этой книги вышло в 2001 году. При перенаборе текста третьего издания возникло огромное количество опечаток. В 5-м издании эти опечатки исправлены. В новое издание добавлено около 200 задач. Добавлена также новая глава 31, посвященная эллипсу, параболе и гиперболе.

В.В. Прасолов. **Элементы теории гомологий.** 2006. 448 с.

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии». В книге приведено много задач (с решениями) и упражнений для самостоятельного решения. Для студентов старших курсов и аспирантов математических и физических специальностей; для научных работников.

У. Фултон. **Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.** Пер. с англ. под ред. А.М. Вершика. 2006. 328 с.

Книга посвящена комбинаторным свойствам таблиц Юнга и их приложениям. Для студентов, аспирантов и научных сотрудников.

А. В. Шаповалов. **Принцип узких мест.** 2006. 24 с.

Книга посвящена поиску решения нестандартных математических задач. Книга адресуется всем любителям интересных задач, в первую очередь — школьникам старших классов, а также учителям и руководителям математических кружков.

А. Н. Ширяев. **Задачи по теории вероятностей.** 2006. 416 с.

Настоящее учебное пособие содержит более 1500 задач (включая подзадачи), непосредственно «привязанных» к учебнику автора в двух книгах «Вероятность. Т. 1» и «Вероятность. Т. 2» (2004 г.) и упорядоченных в соответствии с содержанием этих книг. Пособие рассчитано на студентов физико-математических специальностей. Может служить учебным пособием для аспирантов и справочным пособием для специалистов.