# На сколько частей делят плоскость $n$ прямых?

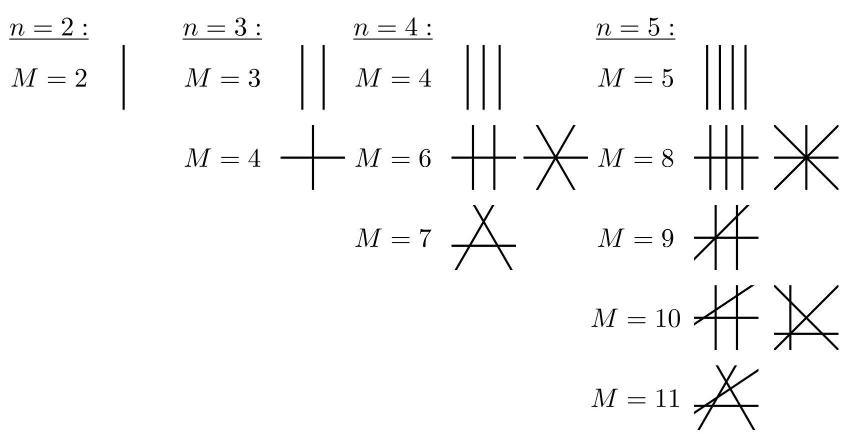
В. И. Арнольд*

Рассмотрим $n$ различных прямых на вещественной проективной плоскости. Они делят ее на (выпуклые) части. Спрашивается, сколько частей может получиться (при всевозможных расположениях данного числа прямых)?

При малых $n$ ответы ясны, возможное количество частей $M$ дается следующей таблицей:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | 4 | 6 | 8 |
| | | | | 7 | 9 |
| | | | | | 10 |
| | | | | | 11 |

Считая одну из прямых бесконечно удаленной, мы получим $n-1$ прямую в $\mathbb{R}^2$. Значения $M$ из таблицы доставляются следующими рисунками $n-1$ прямой:




Аналогичным образом исследуется и число компонент дополнения к набору прямых на аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$: это та же задача, так как

*частично поддержано РФФИ, грант 05–01–00104.

можно одну из $n$ прямых объявить бесконечно удаленной и исследовать дополнение к $n-1$ прямой на аффинной плоскости (совпадающее с дополнением к $n$ прямым на проективной).

Мы замечаем, глядя на предыдущие примеры, что наименьшее число частей дополнения к $n$ прямым в $\mathbb{R}P^2$ есть $M = n$, а наибольшее есть

$$M = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) = 1 + n(n-1)/2.$$

Но промежуточные числа между этими пределами достигаются не все, а только некоторые. Начиная с некоторого места, все достаточно большие значения $M$ достигаются, но начало списка достижимых значений содержит пробелы, дыры.

Целью настоящей работы является описание этих дыр. Вот первая дыра.

Теорема 1. *Значение $M = 2(n-1)$ достижимо, а ни одно из значений $M$ в интервале*

$$n < M < 2(n-1)$$

*не достижимо.*

*Ни при каком выборе $n$ прямых в $\mathbb{R}P^2$ дополнение к их объединению не может состоять из такого числа $M$ связных компонент.*

Доказательство. Обозначим через $k$ наибольшее число прямых, проходящих через одну точку (среди наших $n$ прямых).

Лемма 1. *Если $k = n$, то $M = n$.*

Доказательство. Будем считать одну из этих $n$ прямых бесконечно удаленной. Тогда остальные прямые параллельны. Они делят дополнительную к первой прямой аффинную плоскость $\mathbb{R}^2$ на $n$ частей, так как их $n-1$ штука.

Лемма 2. *Если $k = n-1$, то $M = 2(n-1)$.*

Доказательство. Будем считать оставшуюся, $n$-ую, прямую бесконечно удаленной. Дополнение к ней есть $\mathbb{R}^2$. Набор из $n-1$ проходящих через одну точку прямых делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на $2(n-1)$ часть, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если $k \leqslant n-1$, то $M \geqslant 2(n-1)$.*

Доказательство. Заметим, что при $n > 1$ имеем $k \geqslant 2$ (так как в $\mathbb{R}P^2$ любые две прямые пересекаются).

Выберем одну из $k$ проходящих через одну точку прямых за бесконечно удаленную. Дополнение к ней представляет собой аффинную плоскость $\mathbb{R}^2$, содержащую $k-1$ параллельную прямую выбранного пучка и еще $n-k \geqslant 1$ остальных прямых.

Указанные параллельные прямые делят плоскость $\mathbb{R}P^2$ на $k$ частей. Добавляя по одной остальные прямые, мы будем, шаг за шагом, увеличивать число частей. При этом, если добавляемая $s$-я прямая пересекается с уже имеющимися прямыми в $x_s$ точках, то она делится ими на $x_s$ отрезков, каждый из которых делит одну из бывших до проведения $s$-й прямой частей на две. Поэтому число частей дополнения увеличивается при проведении $s$-й прямой ровно на $x_s$.

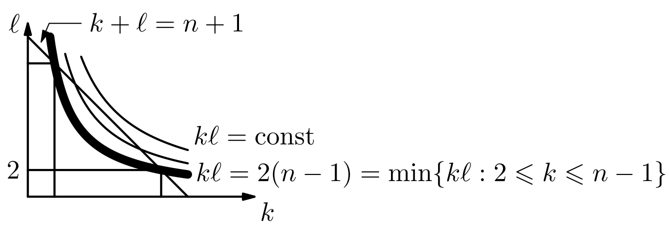
Заметим теперь, что $x_s \geqslant k$ (так как добавляемая прямая пересекает все $k$ параллельных прямых исходного пучка в $k$ разных своих точках). Поэтому общее число добавляемых частей есть

$$x_1 + \cdots + x_{n-k} \geqslant k(n-k).$$

Добавляя эти части к $k$ частям, имевшимся до проведения $n-k$ «дополнительных» прямых, мы получаем вывод:

$$M \geqslant k + k(n-k) = k(n-k+1). \tag{1}$$

Сумма обоих сомножителей в правой части равна $n+1$. Произведение двух положительных сомножителей, сумма которых равна $n+1$, тем больше, чем больше меньший сомножитель:




Если $2 \leqslant k \leqslant n-1$, то $\min\limits_{k+\ell=n+1}(k,\ell) \geqslant 2$, так что $M \geqslant 2(n-2+1) = 2(n-1)$, что и доказывает лемму 3.

Из лемм 1, 2 и 3 следует теорема 1 (так как любое число $k \leqslant n$ либо равно $n$, либо равно $n-1$, либо меньше $n-1$).

Первая дыра описана. Опишем вторую дыру. Пусть $n \geqslant 3$.

Теорема 2. *Значение $M = 3n-6$ достижимо, а ни одно из значений $M$ в интервале*

$$2(n-1) < M < 3(n-2)$$

*не достижимо.*

*Ни при каком выборе $n > 2$ прямых в $\mathbb{R}P^2$ дополнение к ним не может состоять из такого числа $M$ связных компонент.*

Доказательство. Как и выше, будем обозначать через $k$ максимальное число пересекающихся в одной точке прямых (из данных $n$) и будем называть одну из них бесконечно удаленной. Будем рассматривать остальные прямые в дополнительной к выбранной прямой аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$ как составляющие пучок из $k-1$ параллельных друг другу прямых и дополнительный набор из $n-k$ остальных прямых, не параллельных этим $k-1$ прямым пучка.

Если $k = n-1$, то $M = 2(n-1)$ по лемме 2. Если же $k \leqslant n-2$, то из соотношения (1) в доказательстве леммы 3 мы находим

$$M \geqslant k(n-k+1) \geqslant (n-2)((n+1)-(n-2)) = 3(n-2),$$

при условии, что $k \geqslant 3$ (при котором $\min\limits_{k+\ell=n+1}(k,\ell) \geqslant 3$).

Таким образом, утверждение теоремы доказано для всех таких расположений $n$ прямых, что $k > 2$.

В оставшемся случае, когда $k = 2$, мы тоже докажем сейчас, что $M \geqslant 3(n-2)$.

Если $k = 2$, т. е. никакие три прямые не проходят через общую точку, то все наши $n$ прямых делят плоскость на максимально возможное при $n$ прямых (и достижимое для $n$ прямых общего положения) число частей, равное

$$M = 1 + n(n-1)/2.$$

Лемма. *Имеет место неравенство*

$$n(n-1)/2 + 1 \geqslant 3(n-2).$$

Доказательство. Это неравенство имеет вид

$$n^2 - n - 6(n-2) + 2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$n^2 - 7n + 14 \geqslant 0,$$

что и выполняется, поскольку дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части,

$$49 - 4 \cdot 14 < 0,$$

отрцателен.

Следовательно, лемма доказана, и в случае $k = 2$ неравенство $M \geqslant 3(n-2)$ тоже выполняется.

Теорема 2 доказана, мы описали вторую дыру. Она появляется впервые при $n = 6$ (когда в определяющем дыру интервале есть целые точки: $3(n-2) - 2(n-1) > 1$ при $n > 5$).

Дальнейшие дыры мы изучим теперь в предположении, что число прямых $n$ достаточно велико (по сравнению с номером дыры).

Теорема 3. *Предположим, что наибольшее число из $n$ прямых, проходящих через одну точку, равно $k$. Тогда эти прямые делят плоскость $\mathbb{R}P^2$ на $M$ частей, где число $M$ принадлежит интервалу*

$$k(n+1-k) \leqslant M \leqslant k(n+1-k) + r(r-1)/2, \quad \text{где } r = n-k$$

(*причем все числа $M$ из этого интервала достигаются при надлежащем выборе $n$ прямых, если число прямых $n$ достаточно велико*).

Доказательство. Выберем пучок из $k$ прямых. Прямые этого пучка делят плоскость $\mathbb{R}P^2$ на $k$ частей. Оставшиеся $n-k=r$ прямых добавляют к $k$ число частей

$$M' = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-k},$$

где $x_s$ есть число точек $s$-й из добавляемых прямых, по которым ее пересекают предыдущие прямые.

Среди этих предыдущих прямых имеются $k$ прямых выбранного пучка (и $s-1$ добавляемая прямая). Точки пересечения с прямыми пучка все различны (так как единственная общая точка двух прямых пучка есть избранная вначале точка пересечения $k$ прямых пучка, поэтому больше никакие из наших $n$ прямых через эту точку не проходят).

Следовательно, $x_s \geqslant k$, $M' \geqslant k(n-k)$, $M \geqslant k(n-k+1)$. Первое неравенство теоремы 3 доказано.

С другой стороны, $x_s \leqslant k + (s-1)$. Следовательно,

$$M' \leqslant k(n-k) + (0+1+\dots+n-k-1) = k(n-k) + \frac{r(r-1)}{2},$$
$$M \leqslant k(n+1-k) + r(r-1)/2.$$

Этим доказано второе неравенство теоремы 3.

Все значения $M$ из описанного обоими неравенствами интервала достигаются (при достаточно больших $n$) по следующей причине.

Наибольшее число частей доставляет выбор дополнительных $r$ прямых общего положения. Для них все точки пересечения (с прямыми пучка и друг с другом) различны, что и дает $k(n+1-k) + r(r-1)/2$ частей.

Если $n$ достаточно велико по сравнению с $r$ (например, если $n \geqslant r(r-1)/2$), то можно выбрать дополнительные прямые так, чтобы любые выбранные точки их попарного пересечения друг с другом лежали на прямых пучка (так что $x_s = k$ для соответствующих $s$).

Действительно, можно, например, начать с $r$ прямых общего положения в аффинной плоскости $\mathbb{R}^2$ и провести параллельные друг другу и не параллельные ни одной из этих прямых прямые через любое количество $r(r-1)/2 - S$ точек их попарного пересечения. Включив эти параллельные прямые вместе с бесконечно удаленной прямой в пучок из $k = n - r$ параллельных прямых, мы получим набор прямых, для которого $x_s = k$

при всех значениях $s$, кроме $S$ выбранных, для которых $x_s = k+1$. В этом случае $M' = kr + S$, $M = k(n-k+1) + S$, и теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Предположим, что наибольшее число из $n$ прямых, проходящих через одну точку, равно $k > 2$. Тогда эти прямые делят плоскость $\mathbb{R}P^2$ на $M$ частей, где $M \geqslant n(n-1)/(2(k-1))$.*

Здесь важно, что числитель растет с числом прямых $n$ как $n^2$, а знаменатель от числа прямых $n$ не зависит. Из-за этого правая часть становится большей любой линейной функции от $n$ при достаточно больших $n$ (когда $k$ фиксировано).

Для доказательства теоремы 4 упорядочим как-либо заданные $n$ прямых. Назовем «событием» пересечение какой-либо прямой с прямой с меньшим номером. Число событий равно, таким образом, $0+1+2+\dots+$ $+(n-1) = n(n-1)/2$ (независимо от того, сколько различных точек пересечения имеется).

Назовем «разделением» деление какой-либо прямой (скажем, $s$-й) на части прямыми с меньшими номерами. Обозначим через $x_s$ число разделений $s$-й прямой. Эти $x_s$ точек разделяют указанную проективную прямую на $x_s$ частей.

Добавляя прямые по одной, мы каждый раз увеличиваем число компонент дополнения к прямым на число частей $x_s$, добавляемых $s$-й прямой (делящей на две части своими $x_s$ отрезками каждую из ровно $x_s$ уже существовавших пересекаемых ею компонент).

Поэтому общее число компонент дополнения в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ к объединению $n$ прямых составляет

$$M = \sum_{s=1}^{n} x_s,$$

считая формально $x_s = 1$: хотя первую прямую «предыдущие» прямые не делят, нужно учесть единственную компоненту дополнения к одной прямой на *проективной* плоскости.

В каждой точке разделения происходит самое большее $k-1$ событие (пересечение $s$-й прямой с предыдущими), так как больше $k$ прямых нашего набора ни через одну точку не проходят. Поэтому *число всех событий не превосходит произведения* $M(k-1)$. А так как оно равно $n(n-1)/2$, то мы заключаем, что

$$n(n-1)/2 \leqslant M(k-1), \quad \text{т. е. } M \geqslant \frac{n(n-1)}{2(k-1)},$$

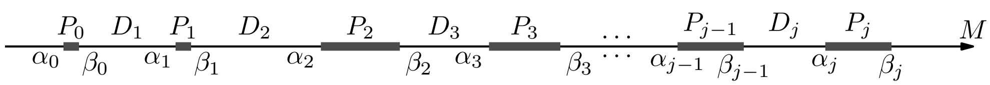
что и доказывает теорему 4.

Для исследования «стабильных» дыр ($j$-я стабильная дыра $D_j$ будет исследоваться при числе прямых $n$, превосходящем некоторую зависящую от $j$ постоянную), введем следующие обозначения:

$$\alpha_j = (n-j)(j+1), \quad \beta_j = (n-j)(j+1) + j(j-1)/2.$$

При достаточно большом $n$ первые члены этих двух последовательностей расположены в следующем порядке:

$$(\alpha_0 = \beta_0) < (\alpha_1 = \beta_1) < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \beta_3 < \dots < \alpha_{j-1} < \beta_{j-1} < \alpha_j.$$




Обозначим через $P_0$, $P_1$, …, замкнутые интервалы

$$P_0 = [\alpha_0 \leqslant M \leqslant \beta_0], \quad P_1 = [\alpha_1 \leqslant M \leqslant \beta_1], \quad \dots, P_j = [\alpha_j \leqslant M \leqslant \beta_j],$$

и через $D_1$, $D_2$, …, $D_j$ дополнительные открытые интервалы

$$D_1 = ]\beta_0 < M < \alpha_1[, \quad D_2 = ]\beta_1 < M < \alpha_2[, \quad \dots, D_j = ]\beta_{j-1} < M < \alpha_j[.$$

Стабильная дыра $D_j$ описывается следующим образом.

Теорема 5. *Если число прямых $n$ достаточно велико, то число $M$ компонент дополнения к ним в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ не может принимать значений из интервала $D_j$: невозможны все значения $M$, для которых*

$$\beta_{j-1} = j(n+1-j) + (j-1)(j-2)/2 < M < (j+1)(n-j) = \alpha_j.$$

Доказательство. Обозначим наибольшее число из $n$ прямых, проходящих через одну точку, через $k$. Мы докажем, что $M$ не может попасть в интервал $D_j$ ни при каком $k$, но это доказательство будет основано на разных соображениях в следующих трех случаях:

I. $k > n-j$;

II. $j+1 \leqslant k \leqslant n-j$;

III. $k \leqslant j$.

При этом мы будем предполагать, что $n-j \geqslant j+1$ (что выполнено, если $n$ достаточно велико).

Случай I. Предположим, что $k$ принимает одно из значений $\{n, n-1, \dots, n-j+1\}$, например, $k = n-r$.

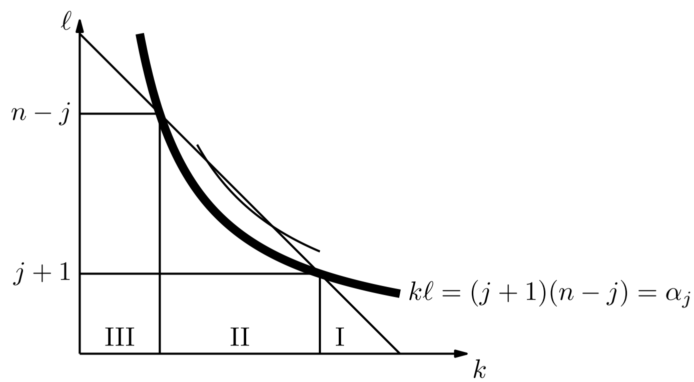
Согласно теореме 3, число $M$ лежит в интервале

$$\alpha_r = (n-r)(r+1) \leqslant M \leqslant (n-r)(r+1) + r(r-1)/2 = \beta_r,$$

т. е. $M \in P_r$, $0 \leqslant r \leqslant j-1$.

Все эти $r$ отрезков с интервалом $D_j$ не пересекаются, так что в случае I теорема 5 доказана.

Случай II. Предположим, что $j+1 \leqslant k \leqslant n-j$. Тогда $\ell = n+1-k$ также удовлетворяет неравенствам $j+1 \leqslant \ell \leqslant n-j$. В этом случае $\min\limits_{k+\ell=n+1}(k,\ell) \geqslant j+1$:




Поэтому, опять согласно теореме 3,

$$M \geqslant (n-j)(j+1) = \alpha_j.$$

В интервале $D_j$, однако, $M < \alpha_j$. Тем самым теорема 5 доказана и в случае II.

Случай III. Предположим, что $2 < k \leqslant j$. Согласно теореме 4,

$$M \geqslant \frac{n(n-1)}{2(k-1)} \geqslant \frac{n(n-1)}{2(j-1)}.$$

Правая часть этого неравенства превосходит число $\alpha_j$, если $n$ достаточно велико. Действительно, $\frac{n(n-1)}{2(j-1)} > (n-j)(j+1)$ при достаточно больших $n$, поскольку тогда

$$\frac{n(n-1)}{n-j} > 2(j^2-1).$$

Например,

$$\frac{n(n-1)}{n-j} \geqslant n,$$

так что условие $n > 2(j^2-1)$ достаточно для неравенства $M > \alpha_j$, исключающего принадлежность точки $M$ интервалу $D_j$ (между $\beta_{j-1}$ и $\alpha_j$).

В единственном оставшемся неразобранным случае $k=2$ наши $n$ прямых общего положения делят проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ на $M = 1 + n(n-1)/2$ частей.

Это число $M$ больше предела $\alpha_j = (n-j)(j+1)$, так как при $j+1 < n/2$ (что мы предполагали) выполнены неравенства

$$\alpha_j < \frac{n(n-1)}{2} < M$$

для $j > 0$.

Стало быть, теорема 5 доказана и при $k = 2$, а следовательно она доказана при всех $k$ (случай $k = 1$ при $n > 1$ не реализуется, так как любые две прямые на проективной плоскости пересекаются).

Таким образом, теорема 5 доказана полностью, так что (при достаточно большом числе прямых $n$) существуют все стабильные дыры

$$D_1, D_2, \ldots, D_j, \ldots$$

в последовательности чисел компонент $M$, на которые $n$ прямых делят вещественную проективную плоскость.

Замечание 1. Я не знаю, будут ли нестабильные дыры (при меньших $n$, чем указано выше) задаваться теми же формулами ($\beta_{j-1} < M < \alpha_j$), что стабильные. Вначале (при малых $j$) нестабильность не сказывается.

Первый неясный случай — третья дыра для $n = 9$. В этом случае формулы дают $\alpha_3 = 24$, $\beta_2 = 22$.

Девять прямых могут делить проективную плоскость и на 22 области, и на 24 области. Могут ли они делить ее на 23 области (или же $M = 23$ составляет для $n = 9$ третью дыру) неизвестно. Такое расположение прямых если и возможно, то лишь в том случае, когда никакие 4 из этих 9 прямых не проходят через одну точку (случай $k = 3$ в доказательстве теоремы 5).

Замечание 2. Источником настоящей работы послужило осуществленное в Беркли А. Б. Гивенталем издание перевода «Геометрии» А. П. Киселёва на американский язык. Просматривая в апреле 2007 года в Калифорнии этот перевод, я не смог сразу решить одну из задач этой книги (все задачи которой я успешно решил в детстве).

Эта задача была такой: сколько прямых делят плоскость $\mathbb{R}^2$ на пять выпуклых частей?

Гивенталь, которого я спросил, как формулировал этот вопрос в исходной книге Киселёв, сознался, что никак: задача добавлена переводчиком (усовершенствовавшим Киселёва и в других местах).

Каждая математическая задача допускает «русскую» версию, которая не может быть упрощена (без потери сущности задачи) и «французскую», которая не может быть обобщена (так как она сформулирована уже в столь общем виде, чтобы он содержал все возможные обобщения).

Приехав в Беркли из Парижа, я решил сформулировать французскую версию вопроса Гивенталя, а для этого заменил 5 областей любым их числом $M$ — от чего и произошла настоящая работа.

Получившуюся общую задачу я так и не решил: следовало бы описать все дыры при всех значениях $n$, а я даже третью дыру вычислил явно только при $n \geqslant 14$ (когда она становится стабильной). Читая в Беркли, Стенфорде, Сан-Хосе и Санта-Кларе лекции местным школьникам (которых героические руководители здешних математических кружков московского образца выучили лучше меня решать трудные задачи), я надеялся, что они справятся с описанием нестабильных дыр, но всё еще этого пока не дождался.

Не решен, по-видимому, вопрос, могут ли 9 прямых делить проективную плоскость на 23 части.

18 июля 2007 года

В. И. Арнольд: Математический институт им. Стеклова РАН
Москва, 119991, Улица Губкина, д. 8