Двадцать семь прямых

С. Л. Табачников Д. Б. Фукс

1. Введение

Некоторые поверхности степени 2 (однополостный гиперболоид) целиком состоят из прямых линий; более того, они *дважды линейчаты*.

Если мы придерживаемся алгебраического подхода к геометрии, то после поверхностей степени 2 следующим этапом должны быть поверхности степени 3. Но тогда как геометрия поверхностей (и, естественно, кривых) второй степени была хорошо понята греками тысячи лет назад, систематическое изучение поверхностей (и кривых) третьей степени началось лишь в XIX веке.

Ныне имеются книги, посвященные «кубической геометрии» (отметим “The non-singular cubic surfaces” B. Segre [4] и «Кубические формы» Ю. И. Манина [1]). Кубическая геометрия весьма отличается от классической «квадратичной геометрии». В частности, кубические поверхности, вообще говоря, не линейчаты. Но всё же они содержат обширные, хотя и конечные, семейства прямых. (Кстати, поверхности степени выше трех обычно не содержат прямых.) Геометры XIX века, в частности Салмон и Кэли, нашли ответ на естественный вопрос:

Сколько прямых содержит поверхность степени 3?

Ответ: двадцать семь.

2. «Сколько?» — удачный ли это вопрос?

Он имеет смысл в *алгебраической геометрии*, т. е. в геометрии кривых и поверхностей, заданных алгебраическими (полиномиальными) уравнениями. Такие кривые и поверхности имеют *степень*, которая равна степени полинома.

Например, сколько общих точек имеют две прямые на плоскости? Следует ответить — одну, хотя может быть и 0 (если прямые параллельны) или бесконечность (если они совпадают). В первом случае можно сказать,

Глава из книги «Математический омнибус». Публикуется с любезного разрешения авторов. Перевод Б. Р. Френкина.

что общая точка «бесконечно удалена», и всё же учесть ее. Поэтому ответ равен 1 или ∞.

Рассмотрим теперь кривую степени два. Это может быть эллипс, гипербола, парабола или что-нибудь более вырожденное, вроде пары прямых. Можно сказать, что кривая степени 2 имеет с прямой 2, 1, 0 или бесконечно много общих точек. Но случаи 1 и 0 спорны. Наличие только одной общей точки означает, что имеется либо касательная, т. е. две совпавшие точки, либо прямая, параллельная асимптоте гиперболы или оси параболы; в последних случаях «вторая точка» бесконечно удалена. Отсутствие общей точки означает, что на самом деле общие точки — комплексные (имеют комплексные координаты, удовлетворяющие уравнениям прямой и кривой) или бесконечно удаленные (это происходит, если наша прямая — асимптота гиперболы). Но если мы учитываем каждую точку нужное количество раз и не отбрасываем комплексные и бесконечно удаленные точки, то наш ответ: 2 или бесконечность.

Аналогично, кривые степеней m и n должны иметь mn или бесконечно много общих точек (теорема Безу).

Неформально говоря, если задача из алгебраической геометрии имеет конечное число решений, то количество решений зависит лишь от степеней соответствующих кривых и поверхностей. Разумеется, это перестает выполняться, если нас интересуют лишь *вещественные* решения. Что хуже, в некоторых задачах не могут все решения быть вещественными. Например, известно, что кривая третьей степени, не содержащая прямой, имеет ровно 9 точек перегиба. Но вещественны из них не более трех. Кривая третьей степени с тремя вещественными точками перегиба показана на рис. 1. Для удобства читателя мы показали асимптоту кривой и отметили точки перегиба стрелками.

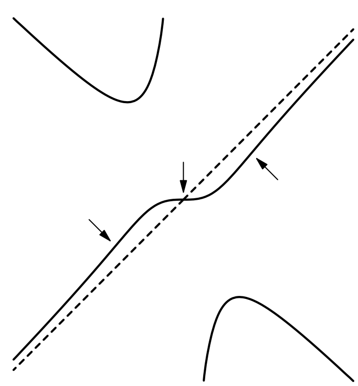

Рис. 1. *Кривая $x^3 = xy^2 + y$ с отмеченными точками перегиба*

3. Основной результат

Теорема 1. *Поверхность степени* 3 *содержит* 27 *или бесконечно много прямых.*

4. Вспомогательная задача: двойные касательные

Двойная касательная к кривой или поверхности — это прямая, касательная к ней в двух различных точках. Точка касания учитывается как две или больше точек пересечения прямой с кривой или поверхностью. Поэтому кривые и поверхности степени ниже четырех никогда не имеют двойных касательных, не содержащихся в них.

Важное наблюдение. Двойная касательная к поверхности степени 3 содержится в этой поверхности.

Рассмотрим теперь кривые степени 4 на плоскости.

Вопрос. Сколько двойных касательных имеет кривая степени 4?
Ответ: 28.

Не станем приводить полное доказательство этого факта. Ограничимся построением кривой степени 4 с 28 *вещественными*, *конечными*, *различными* двойными касательными. Рассмотрим многочлен

$$p(x,y) = (4x^2 + y^2 - 1)(x^2 + 4y^2 - 1).$$

Его степень равна 4. Уравнение $p(x,y) = 0$ определяет на плоскости «эллиптический крест» (см. рис. 2, слева). Крест делит плоскость на 6 областей. Функция $p(x,y)$ положительна во внешней (неограниченной) области и в центральной области, а в лепестках отрицательна. Возьмем очень малое положительное ε и рассмотрим кривую $p(x,y)+\varepsilon = 0$, также степени 4.

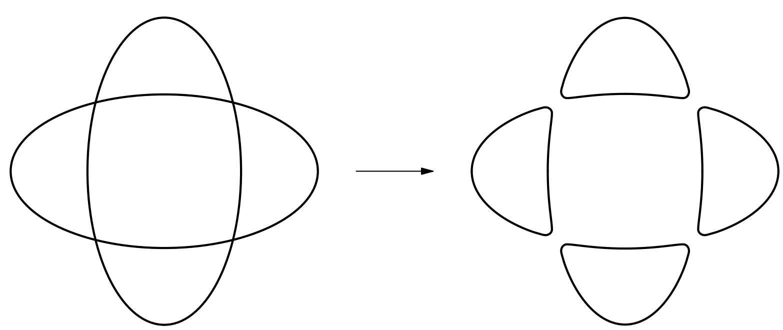

Рис. 2. *Построение кривой*

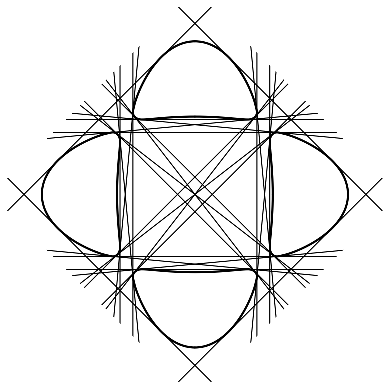

Рис. 3. *28 двойных касательных*

Она состоит из четырех овалов внутри лепестков предыдущего креста[1)]. Эти овалы очень близки к границам лепестков.

Каждые два овала имеют (не менее чем, но в действительности ровно) 4 общих касательных: две внешних и две внутренних. При этом овалы не выпуклы (их форма близка к форме лепестков), и к каждому из них имеется двойная касательная. Итого:

$$\binom{4}{2} \cdot 4 + 4 = 28.$$

5. Поверхности степени 3 и кривые степени 4

Пусть S — поверхность степени 3, заданная уравнением

$$p_3(x, y, z) + p_2(x, y, z) + p_1(x, y, z) + c = 0,$$

где p_1, p_2, p_3 — однородные многочлены степени 1, 2, 3 соответственно. Предположим, что $0 = (0, 0, 0) \in S$, то есть $c = 0$. Рассмотрим некоторую прямую, проходящую через 0; она состоит из точек с пропорциональными координатами, скажем

$$x = \alpha t,\ y = \beta t,\ z = \gamma t \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0). \tag{1}$$

Эта прямая пересекает S в нуле и еще двух точках. Если эти две точки совпадают, пометим нашу прямую. Таким образом, каждая помеченная прямая пересекает S в нуле, касается S в некоторой точке T и не имеет с

[1)] Термин «овал» часто обозначает замкнутую строго выпуклую гладкую кривую. В вещественной алгебраической геометрии овал алгебраической кривой — это ее компонента, ограничивающая топологический круг.

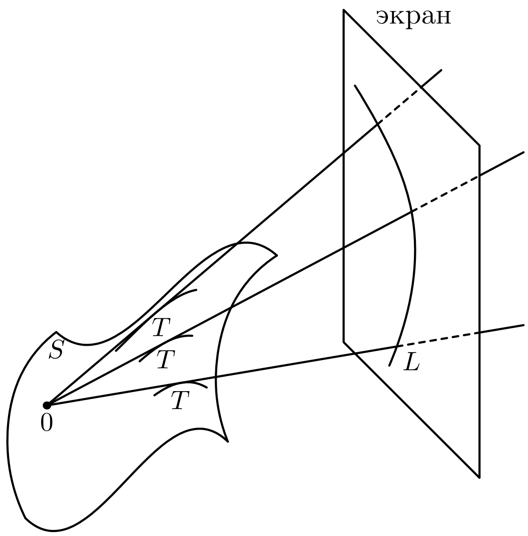

Рис. 4. *Проекция поверхности на экран*

S общих точек, кроме 0 и T. Рассмотрим пересечения помеченных прямых с некоторым экраном. Получаем на экране кривую, которую обозначим L (рис. 4).

Таким образом, если $P \in L$, то прямая, проходящая через 0 и P, касается S в некоторой точке $T(P) \in S$. Заметим, что если l — прямая, касательная к L в точке P, то плоскость, содержащая 0 и l, касается S в точке $T(P)$.

Теперь покажем, что кривая L имеет степень 4. Чтобы найти пересечение прямой (1) с S, подставим (1) в уравнение для S:

$$p_3(\alpha, \beta, \gamma)t^3 + p_2(\alpha, \beta, \gamma)t^2 + p_1(\alpha, \beta, \gamma)t = 0.$$

Одно из решений этого уравнения равно 0, а два других совпадают тогда и только тогда, когда

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = p_2(\alpha, \beta, \gamma)^2 - 4p_3(\alpha, \beta, \gamma)p_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Пересечение прямой (1) и плоскости $z = 1$ отвечает значению $t = \gamma^{-1}$ (если $\gamma = 0$, то пересечения нет; это имеет место для «бесконечно удаленных» точек на L, количество которых равно 4). Это пересечение имеет координаты $(x, y, 1)$, где $x = \alpha/\gamma,\ y = \beta/\gamma$. Уравнение $D(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ можно записать в виде $D(x, y, 1)\gamma^4 = 0$, то есть $D(x, y, 1) = 0$. Это уравнение имеет степень 4.

Пусть теперь l — одна из 28 двойных касательных к L, а P_1, P_2 — ее точки касания. Плоскость p, содержащая 0 и l, касается S в точках $T(P_1)$

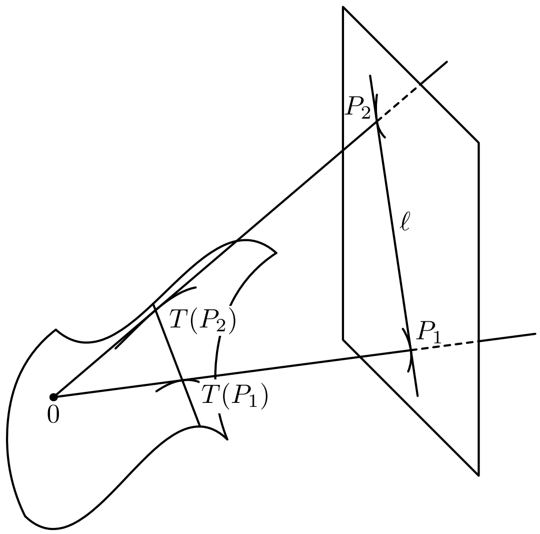

Рис. 5. *От двойных касательных — к прямым на поверхности*

и $T(P_2)$ (см. рис. 5). Следовательно, прямая, проходящая через $T(P_1)$ и $T(P_2)$, касается S в этих точках. Это возможно, лишь если она содержится в S (см. Важное наблюдение в разделе 4). Это доказывает нашу теорему за вычетом последнего, и довольно неожиданного, вопроса.

6. Двадцать восемь или двадцать семь?

Казалось бы, мы построили 28 прямых, лежащих в S. Покажем, что одна из них — мираж.

Кто может поручиться, что если $P = (x, y, 1) \in L$, то $T(P) \neq 0$? Равенство $T(P) = 0$ верно в том и только том случае, если прямая (1) имеет тройное пересечение с S. Это означает, что уравнение

$$p_3(x, y, 1)t^3 + p_2(x, y, 1)t^2 + p_1(x, y, 1)t = 0$$

имеет три совпадающих решения: $t_1 = t_2 = t_3 = 0$; последнее происходит тогда и только тогда, когда $p_2(x, y, 1) = 0$ и $p_1(x, y, 1) = 0$. Эти два уравнения описывают прямую и кривую степени 2 в плоскости с координатами x, y; поэтому имеется два решения. Геометрически это означает, что существуют две прямых, пересекающих S лишь в нуле: все три точки пересечения сливаются. Эти две прямые порождают касательную плоскость p_0 к S в нуле; они пересекают плоскость $z = 1$ в двух точках кривой L, а плоскость p_0 пересекает плоскость $z = 1$ по прямой, касательной к L в этих двух точках. Эта двойная касательная к L не соответствует никакой прямой на S. Таким образом, мы получаем «только» $28 - 1 = 27$ прямых на S.

7. Все эти прямые могут быть вещественными

Рассмотрим поверхность

$$4(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)^4 + 3(x + y + z). \tag{2}$$

Она показана на рис. 6; вертикальная ось на этом рисунке — «диагональ» $x = y = z$.

Теорема 2. *Поверхность* (2) *содержит* 27 *вещественных прямых.*

Все 27 прямых, лежащих на поверхности (2), показаны на рис. 7 — можете их пересчитать. Этот рисунок, однако, выглядит довольно беспорядочным; тем не менее, приведенное ниже доказательство теоремы 2 может пролить некоторый свет на конструкцию прямых и их поведение.

Доказательство. Девять из прямых очевидны:

$$(\mathbf{1}) \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \qquad (\mathbf{2}) \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \qquad (\mathbf{3}) \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$$(\mathbf{4}) \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases} \qquad (\mathbf{5}) \begin{cases} y = 1 \\ z = -x \end{cases} \qquad (\mathbf{6}) \begin{cases} z = 1 \\ x = -y \end{cases}$$

$$(\mathbf{7}) \begin{cases} x = -1 \\ y = -z \end{cases} \qquad (\mathbf{8}) \begin{cases} y = -1 \\ z = -x \end{cases} \qquad (\mathbf{9}) \begin{cases} z = -1 \\ x = -y \end{cases}$$

(каждая из этих систем уравнений имеет следствием $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = (x + y + z)^3$). Эти прямые лежат в трех параллельных плоскостях: $x+y+z = 0$, $x+y+z = 1$, $x+y+z = -1$; в первой из этих плоскостей прямые пересекаются в точке (0,0,0), а в двух других образуют равносторонние треугольники.

Остальные 18 прямых обозначим, для удобства в дальнейшем, буквами **a**, **b**, ..., **r**. Шесть из этих прямых имеют простые уравнения:

$$(\mathbf{f}) \begin{cases} x = 0 \\ y = z + 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{j}) \begin{cases} y = 0 \\ z = x + 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{b}) \begin{cases} z = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

$$(\mathbf{g}) \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{k}) \begin{cases} y = 0 \\ z = x - 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{c}) \begin{cases} z = 0 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

(Чтобы найти эти уравнения, рассмотрим пересечения поверхности (2) с плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$. Например, подставим $x = 0$ в уравнение (2): $4(y^3 + z^3) = (y + z)^3 + 3(y + z)$, откуда $3x^3 + 3y^3 = 3yz(y + z) + 3(y + z)$, поэтому либо $y + z = 0$, либо $y^2 - yz + z^2 = yz + 1$, т. е. $(y - z)^2 = 1$,

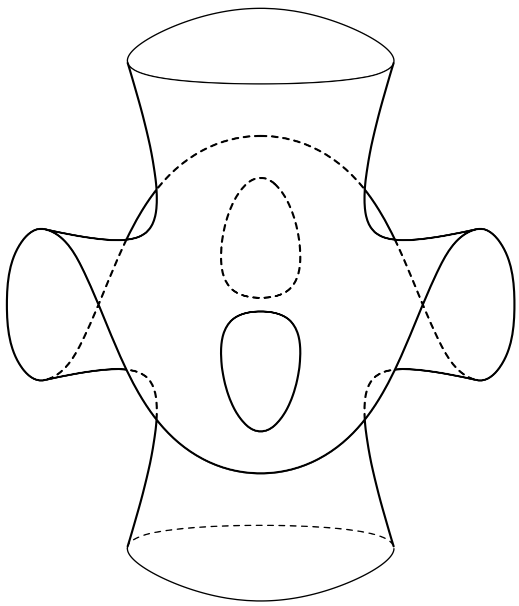

Рис. 6. *Кубическая поверхность* (2)

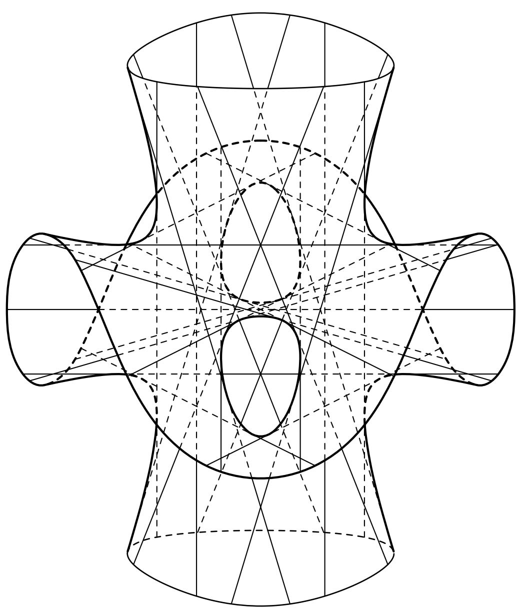

Рис. 7. *Поверхность с 27 прямыми*

$y-z=\pm 1$. Одно из трех полученных уравнений задает прямую (1), а два других совпадают с (**f**) и (**g**). Случаи $y=0$, $z=0$ аналогичны.)

Уравнения оставшихся 12 прямых включают «золотое сечение» $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Они имеют вид

$$(\mathbf{a})\ \begin{cases} x=\varphi(y+z)\\ y=z+\varphi \end{cases} \qquad (\mathbf{e})\ \begin{cases} y=\varphi(z+x)\\ z=x+\varphi \end{cases} \qquad (\mathbf{i})\ \begin{cases} z=\varphi(x+y)\\ x=y+\varphi \end{cases}$$

$$(\mathbf{l})\ \begin{cases} x=\varphi(y+z)\\ y=z-\varphi \end{cases} \qquad (\mathbf{d})\ \begin{cases} y=\varphi(z+x)\\ z=x-\varphi \end{cases} \qquad (\mathbf{h})\ \begin{cases} z=\varphi(x+y)\\ x=y-\varphi \end{cases}$$

и

$$(\mathbf{o})\ \begin{cases} x=-\varphi^{-1}(y+z)\\ y=z+\varphi^{-1} \end{cases} \quad (\mathbf{q})\ \begin{cases} y=-\varphi^{-1}(z+x)\\ z=x+\varphi^{-1} \end{cases} \quad (\mathbf{m})\ \begin{cases} z=-\varphi^{-1}(x+y)\\ x=y+\varphi^{-1} \end{cases}$$

$$(\mathbf{p})\ \begin{cases} x=-\varphi^{-1}(y+z)\\ y=z-\varphi^{-1} \end{cases} \quad (\mathbf{r})\ \begin{cases} y=-\varphi^{-1}(z+x)\\ z=x-\varphi^{-1} \end{cases} \quad (\mathbf{n})\ \begin{cases} z=-\varphi^{-1}(x+y)\\ x=y-\varphi^{-1} \end{cases}$$

(предоставляем читателю подставить эти 12 равенств в уравнение (2) и проверить, что полученные прямые лежат на поверхности).

Диаграммы на рис. 8, 9 показывают сечения нашей поверхности 12 различными плоскостями вида $x+y+z=\mathrm{const}$ (с центрами в точках вида $x=y=z$). Показаны также следы прямых (**a**) — (**r**). Можно видеть, что в каждой из областей $x+y+z>1$ и $x+y+z<1$ поверхность состоит из «центральной трубы» и трех «крыльев». В области $-1 \leqslant x+y+z \leqslant 1$ эти крылья сливаются с трубой; в этой области содержатся 9 прямых (**1**)–(**9**). Среди остальных 18 прямых шесть (три пары параллельных (**m**)–(**r**)) лежат на крыльях, а 12 (шесть пар параллельных (**a**)–(**l**)) — на центральной трубе. Конфигурация этих прямых показана на рис. 10. $\square$

8. Некоторые другие поверхности

Существуют и другие кубические поверхности с обширными семействами вещественных прямых. Кратко обсудим некоторые из них.

Рассмотрим семейство поверхностей

$$x^3+y^3+z^3-1=\alpha(x+y+z-1)^3. \tag{3}$$

Теорема 3. *Если* $\alpha > \frac{1}{4}$ *и* $\alpha \neq 1$, *то поверхность* (3) *содержит* 27 *вещественных прямых.*

Доказательство. Три прямых очевидны: $\{x=1,\ y=-z\}$ и еще две, получаемые перестановкой переменных x, y, z. Еще четыре имеют вид $\{x=u, y+z=0\}$, $\{x=1, y+uz=0\}$, где u — одно из решений квадратного

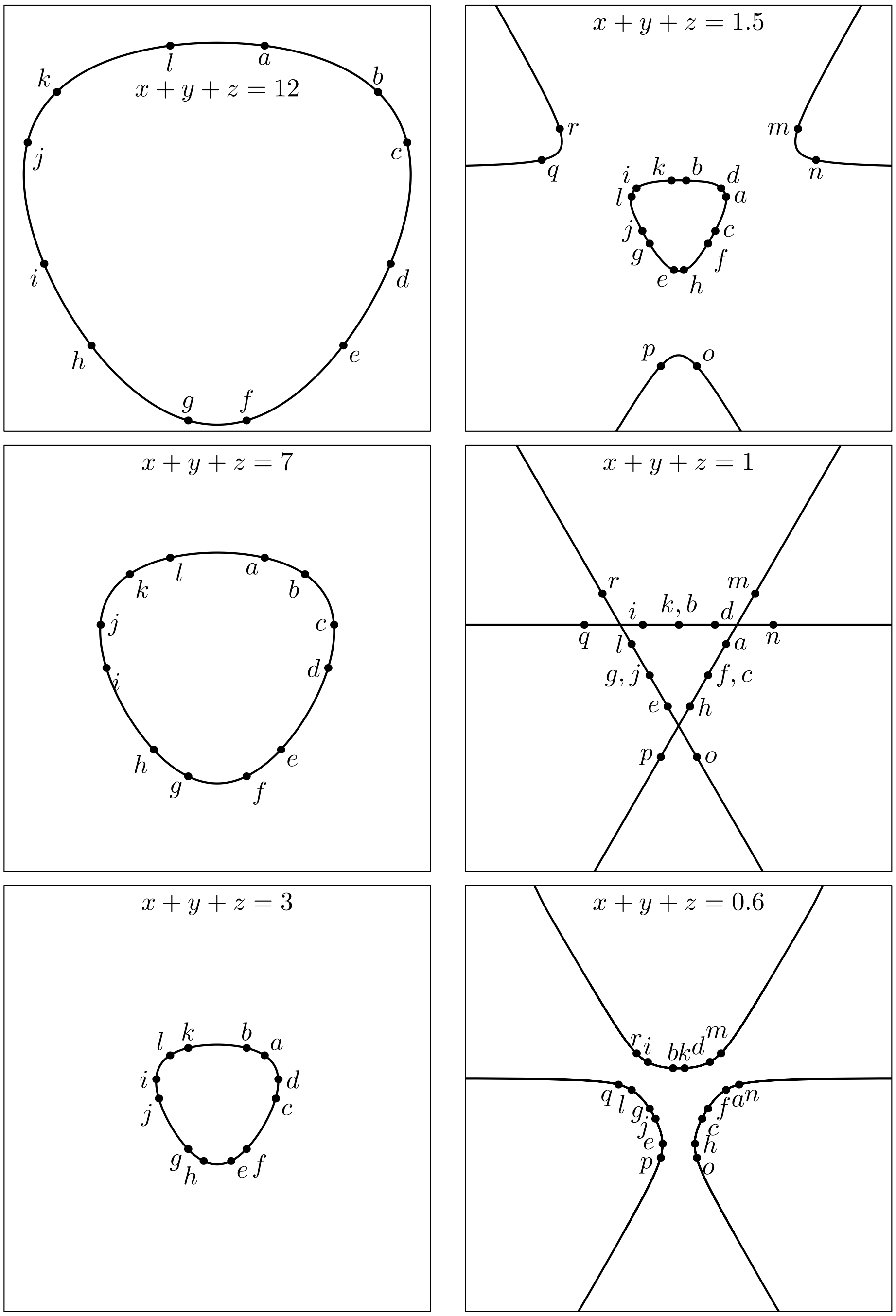

Рис. 8. *Сечения поверхности* (2)

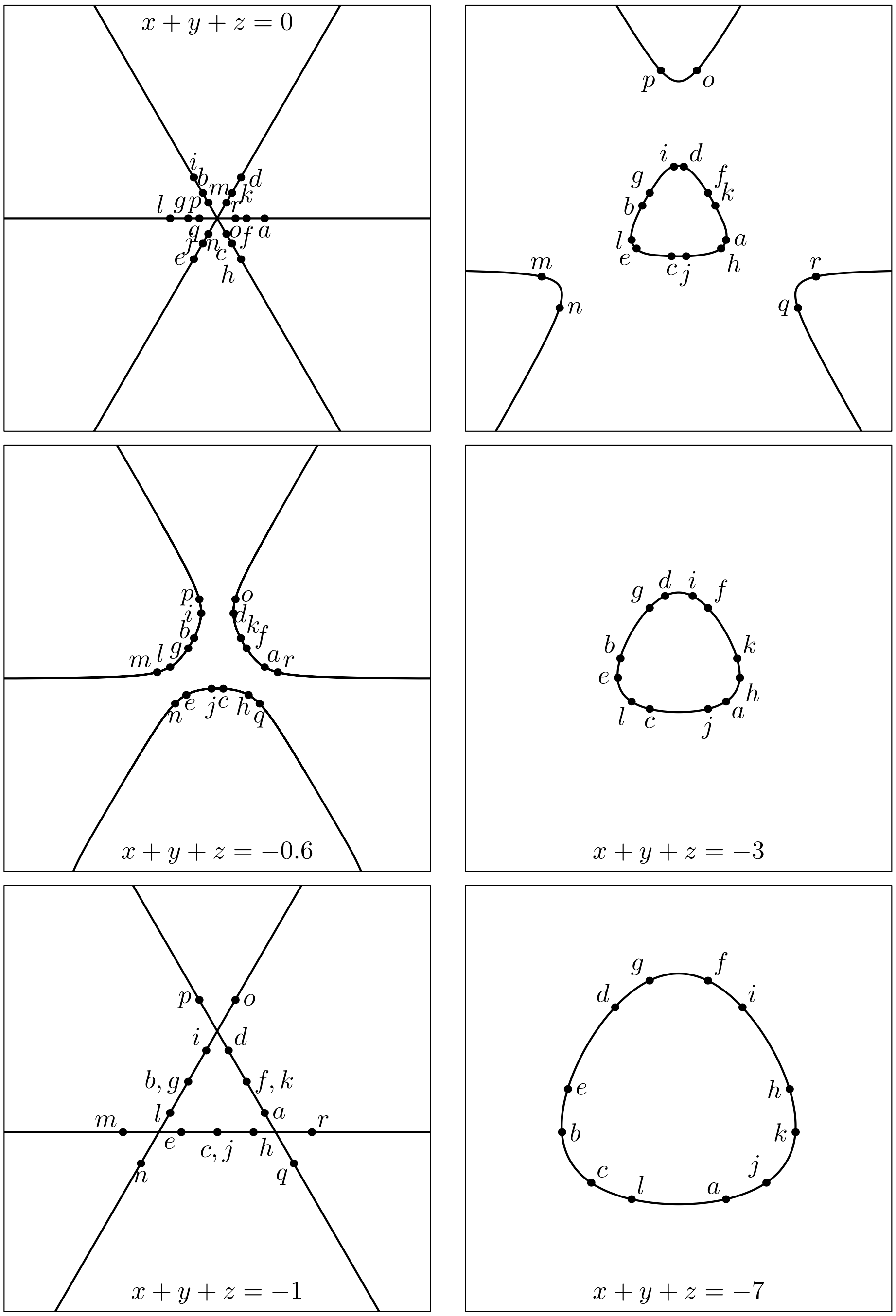

Рис. 9. *Сечения поверхности* (2), *продолжение*

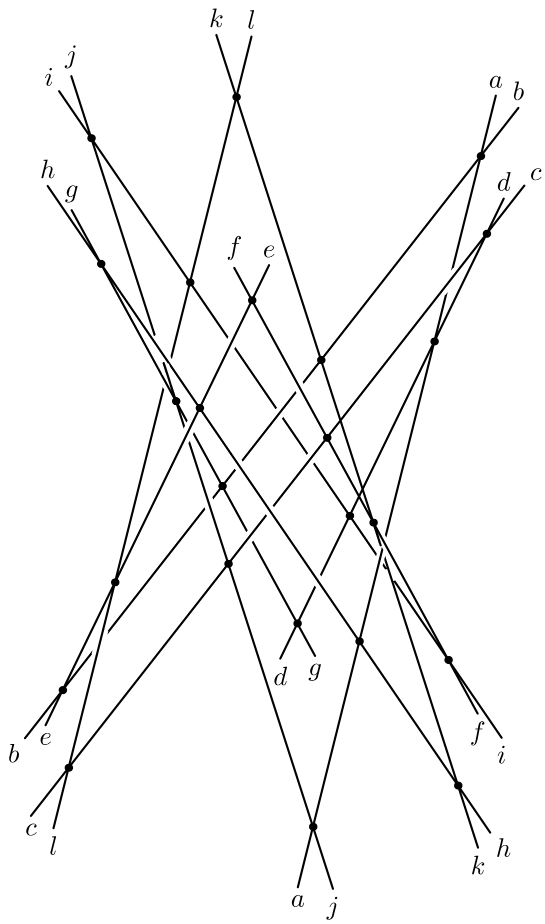

Рис. 10. *Прямые на трубе*

уравнения

$$(\alpha - 1)(u - 1)^2 = 3u,$$

и еще восемь вновь получаются перестановкой x, y, z. Наконец, еще четыре имеют вид $\{x + v^2(y + z) = 0\}$, $\{y - z = 2v - v^3(y + z)\}$, где v — одно из четырех решений уравнения

$$(4\alpha - 1)(v^2 - 1)^2 = 3v^2,$$

а перестановка переменных x, y, z опять дает еще восемь прямых. Всего получается 27. □

В случае $\alpha = 1/4$ уравнение (3) задает поверхность с «особыми точками» $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ (в окрестности каждой из этих точек поверхность похожа на конус). На этой поверхности имеется лишь 9 прямых: $\{x = 1, y = z\}$, $\{x = 1, y = -z\}$, $\{x = -1, y = -z\}$, и можно получить еще шесть, меняя местами x, y, z.

Случай $\alpha = 1$ особенно интересен. Чтобы придать этой поверхности более привлекательный вид, следует выбрать (непрямоугольную) систему координат, в которой точки (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) (принадлежащие поверхности) являются вершинами правильного тетраэдра. Тогда все симметрии пространства, отображающие тетраэдр в себя, отображают и поверхность в себя. Предоставляем читателю найти уравнения прямых на этой поверхности (см. упражнение 1).

9. Конфигурация 27 прямых

Легко видеть из рис. 8, 9 и особенно 10, что между 27 прямыми имеется много пересечений. На самом деле эти пересечения подчинены очень строгим правилам, одинаковым для всех кубических поверхностей. Как обычно, не будем различать пересекающиеся и параллельные прямые и потому будем говорить не о пересекающихся, а о компланарных прямых. Первое их свойство очевидно.

Теорема 4. *Если какие-то две прямые на нашей поверхности компланарны, то на поверхности существует еще ровно одна прямая, принадлежащая той же плоскости.*

Доказательство. Пересечение кубической поверхности с плоскостью является кубической кривой на плоскости, т. е. определяется уравнением степени 3. Если это пересечение содержит две различные прямые, то уравнение кривой делится на уравнения прямых, и после деления мы получаем уравнение степени 1, которое определяет третью прямую. $\square$

Следующая теорема полностью описывает свойства компланарности рассматриваемых прямых.

Теорема 5. *Пусть ℓ_1 — любая из 27 прямых на кубической поверхности S.*

(1) *Существует ровно 10 прямых на S, компланарных с ℓ_1; обозначим их $\ell_2, \dots, \ell_{11}$. Из этих 10 прямых можно составить 5 пар взаимно компланарных прямых ℓ_2, ℓ_3; ℓ_4, ℓ_5; $\dots$; ℓ_{10}, ℓ_{11}. Никакие другие две прямые среди $\ell_2, \dots, \ell_{11}$ не компланарны.*

(2) *Каждая из остальных 16 прямых $\ell_{12}, \dots, \ell_{27}$ компланарна ровно с одной прямой из каждой пары в (1). Для любых двух прямых среди $\ell_{12}, \dots, \ell_{27}$ количество прямых среди $\ell_2, \dots, \ell_{11}$, компланарных с обеими, нечетно.*

(3) *Две прямые среди* $\ell_{12}, \ldots, \ell_{27}$ *компланарны тогда и только тогда, когда существует ровно одна прямая среди* $\ell_2, \ldots, \ell_{11}$, *компланарная с обеими* (*т. е. в данном случае нечетное количество из утверждения* (2) *равно* 1).

Замечательно, что все эти утверждения справедливы независимо от того, какую из 27 прямых взять в качестве ℓ_1.

Мы не будем доказывать эту теорему, но для поверхности из раздела 7 ее можно проверить с помощью диаграмм (рис. 7, 9, 10) и/или уравнений. Например, прямая **a** компланарна с каждой из прямых

$$(\mathbf{1}), \mathbf{l};\ (\mathbf{5}), \mathbf{h};\ (\mathbf{9}), \mathbf{d};\ \mathbf{b}, \mathbf{r};\ \mathbf{j}, \mathbf{n}.$$

Здесь показаны также пять пар взаимно компланарных прямых. Любая из остальных прямых компланарна с одной прямой из каждой пары. Например:

прямая **c** компланарна с **l**, (**5**), **d**, **b**, **j**;
прямая **f** компланарна с **1**, (**5**), **9**, **r**, **n**;
прямая **m** компланарна с **l**, (**5**), **d**, **r**, **n**.

Пятерки прямых, компланарных с **c** и **f**, содержат лишь одну общую прямую (**5**), и прямые **c** и **f** компланарны. Напротив, пятерки прямых, компланарных с **c** и **m**, содержат три общих прямых **l**, (**5**) и **d**, и прямые **c** и **m** не компланарны.

Некоторые другие свойства рассматриваемых прямых вытекают из теоремы 5. Предоставляем их читателю в качестве упражнений.

10. Заключение. Другие перечислительные проблемы в алгебраической геометрии

Проблемы подсчета количества алгебраических кривых данной степени (скажем, прямых), пересекающих некоторые другие кривые и/или касательных еще к каким-то кривым, стали ныне весьма популярными ввиду их значения в современной теоретической физике (конкретнее, в квантовой теории поля, см. [2, 3]). Здесь мы кратко обсудим одну из таких проблем, которая интересна неожиданным ответом и драматической двухсотлетней историей.

Вопрос. Даны 5 коник (= эллипсов, гипербол, парабол). Сколько коник касательны ко всем им?

(Почему 5? Потому что для 4 коник количество общих касательных коник бесконечно, а для типичного семейства из 6 коник вообще не существует общих касательных коник.)

Эта проблема была впервые рассмотрена Штейнером. В начале XIX века он опубликовал свой результат: существует 7736 таких коник. Однако этот ответ многим казался сомнительным. Через несколько десятилетий после работы Штейнера де Жонкьер повторил его выкладки и получил иной результат. Но репутация Штейнера в среде математиков была столь высока, что де Жонкьер не решился опубликовать свою работу. В конце концов правильный ответ был найден в 1864 г. Шалем: существуют 3264 коники, касательные к 5 данным коникам.

Шаль, однако, учитывал комплексные коники, и осталось неясным, сколько из них могут быть вещественными. В 1997 г. Ронга, Тоньоли и Вуст нашли семейство из 5 эллипсов, для которого все 3264 касательных коники вещественны. А в 2005 г. Вельшингер доказал, что для семейства из 5 вещественных коник с попарно непересекающимися внутренностями не менее 32 из 3264 касательных коник вещественны.

11. Упражнения

Упражнение 1. Найдите уравнения всех прямых на поверхности

$$x^3 + y^3 + z^3 - 1 = (x + y + z - 1)^3.$$

Указания. (a) Существует лишь 24 прямых на этой поверхности; остальные 3 оказываются бесконечно удаленными.

(b) Через каждую вершину тетраэдра, описанного в разделе 8, проходят ровно три прямых; они параллельны трем сторонам грани, противоположной этой вершине. Это дает 12 прямых.

(c) Уравнения остальных 12 прямых содержат золотое сечение.

Упражнение 2. Найдите прямые на поверхности

$$xyz + \beta(x^2 + y^2 + z^2) = \gamma.$$

Упражнение 3. Среди 27 прямых на кубической поверхности имеется ровно 45 компланарных троек прямых.

Замечание. Некоторые компланарные тройки из раздела 7 состоят из прямых, которые проходят через одну точку (таких троек семь) или попарно параллельны (таких троек две). Следует рассматривать эти свойства как случайные, на произвольной кубической поверхности такого не происходит.

Упражнение 4. Максимальное количество попарно некомпланарных прямых равно 6. Существует ровно 72 таких шестерки.

Упражнение 5. Количество перестановок 27 прямых, которые переводят компланарные прямые в компланарные, равно $51830 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$. (Эти перестановки образуют группу, известную в теории групп как E_6.)

Список литературы

[1] Манин Ю. И. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*. М.: Наука, Физматлит. 1972.

[2] D. Cox, S. Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[3] S. Katz. *Enumerative geometry and string theory*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[4] B. Segre. *The non-singular cubic surfaces*. Oxford University Press, Oxford, 1942.

С. Л. Табачников: Pennsylvania State University
Д. Б. Фукс: University of California, Davis