a-Диаметры и турановские графы

С. Б. Гашков

1. Введение

Назовем *a-диаметром* произвольную пару точек множества, расстояние между которыми не меньше aD, где D — диаметр этого множества (максимальное расстояние между его точками). Максимальное число a-диаметров у n-элементного плоского множества обозначим $N_2(a, n)$. Предыдущее определение очевидно можно ввести и пространственном случае (тогда в обозначениях появляется индекс 3).

Задача о вычислении максимального числа a-диаметров была поставлена П. Эрдёшем [1] (и впоследствии им же решена). Так как она совершенно элементарна, то представляет интерес даже для школьников, и не случайно, что ее формулировка появилась в задачнике [2]. Однако решения этой задачи там нет, вероятно потому что работы Эрдёша и соавторов, содержащие ее решение, оказались неизвестными И. М. Яглому в момент написания книги [2].

Автор настоящей заметки около двадцати лет назад придумал ее решение (как выяснилось впоследствии, в основном совпадающее с решением Эрдёша, что не удивительно), которое кажется небесполезным вместе со связанными с ним другими интересными задачами предложить вниманию читателя[1)].

Для формулировки теоремы понадобится одно определение, а для доказательства — одна лемма (на самом деле это известная теорема Турана).

Определим $k_2(a)$ как наибольшее число точек в плоском множестве, в котором любая пара точек образует a-диаметр. Аналогичное определение можно ввести и для трехмерного (и вообще d-мерного) пространства. Для краткости индекс, указывающий размерность, далее опускается.

[1)] Я узнал о существовании четырех работ Эрдёша с соавторами, посвященными этой задаче, от А. Ф. Сидоренко, который тогда еще был в Москве, и хотя он любезно дал мне посмотреть эти работы, я не догадался записать их адреса, и поэтому сейчас не знаю, как сделать на них ссылку в библиографии.

2. Теорема Эрдёша об оценке максимального числа a-диаметров

Теорема 1 (Эрдёш – Шош – Туран). *Для любого a, $0 < a < 1$, и $n = k(a)q + r$, где $0 \leqslant r < k(a)$ и q — целое число, справедливо равенство*

$$N(a,n) = \frac{k(a)-1}{2k(a)}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Для доказательства нижней оценки достаточно указать n-элементное множество с $N(a,n)$ диаметрами. Обозначим $K(a)$ какое-нибудь $k(a)$-элементное множество, в котором любая пара точек образует a-диаметр. Существование такого множества вытекает из определения $k(a)$, из него также следует существование положительного ϵ, такого что расстояние между любыми двумя точками из множества $K(a)$ больше $ad + (a+1)\epsilon$, где d — диаметр $K(a)$. Пусть $n = k(a)q + r$, $0 \leqslant r < k(a)$. Опишем окружности радиуса $\epsilon/2$ с центрами в точках множества $K(a)$. Внутри каждой из первых r окружностей выберем по $q+1$ точке (полученные множества точек обозначим $M_1, \ldots, M_r$), а внутри каждой из остальных $k(a) - r$ окружностей выберем по q точек (полученные множества точек обозначим $M_{r+1}, \ldots, M_{k(a)}$). Объединение M указанных множеств M_i содержит $(q+1)r + q(k(a) - r) = qk(a) + r = n$ точек. Для любых двух точек x, y из полученного множества расстояние между ними в силу неравенства треугольник не больше $d + \epsilon$, поэтому диаметр этого множества не больше $d + \epsilon$. Если x, y взяты из разных множеств M_i, то согласно неравенству треугольника расстояние между x и y больше $ad + (a+1)\epsilon - \epsilon = a(d+\epsilon)$, поэтому любая пара точек из разных множеств M_i образует a-диаметр множества M. Так как число пар точек, принадлежащих одному множеству M_i, равно $(q+1)q/2$ для $q+1$-элементных множеств, и равно $q(q-1)/2$ для остальных $k(a)-r$ множеств, а общее число пар точек равно $n(n-1)/2$, то число a-диаметров не меньше

$$n(n-1)/2 - r(q+1)q/2 - (k(a) - r)q(q-1)/2 = \\ = \frac{k-1}{2k}(n^2 - r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

Нижняя оценка доказана.

Для доказательства верхней оценки в произвольном n-элементном множестве отрезки, являющиеся a-диаметрами, покрасим в белый цвет, а остальные отрезки — в черный. Из определения $k(a)$ следует, что в этом множестве не существует $k(a)+1$-элементного подмножества, все отрезки которого белого цвета.

Применяя следующую далее теорему Турана получаем верхнюю оценку.

3. Теорема Турана об экстремальных графах

Эта теорема является одной из первых теорем теории экстремальных графов (этой теории уже посвящены целые книги, например книга Б. Боллобаша *Extremal graph theory*, но на русском языке, кажется, их переводов не появлялось). Доказанная в 1941 году теорема Турана [3] довольно популярна в литературе, связанной с теорией графов, у нее известно много доказательств, есть она и в некоторых книгах на русском языке, например в [4–6] (в последней, правда, без доказательства). Но общеизвестной, пожалуй, ее считать нельзя (да и доказательства в [4, 5] написаны так, что их непросто воспринять, не вникая в контекст), поэтому представляется разумным дать ее здесь с доказательством (которое, как недавно стало понятно автору, весьма близко к доказательству из [7], и доказательству самого Турана).

Теорема 2 (Туран). *Отрезки, соединяющие пары точек n-элементного множества, покрашены в белый и черный цвета так, что среди любых его $k+1$ точек найдется хотя бы одна пара, соединенная белым отрезком. Тогда черных отрезков у этого множества не больше*

$$\frac{k-1}{2k}(n^2-r^2)+\frac{r(r-1)}{2},$$

где $n = kq + r$, $0 \leqslant r < k$, q — целое число, причем для любых n, k эта оценка достигается.

Для доказательства применим индукцию по n. База индукции ($n \leqslant k$) очевидна. Шаг индукции. Выберем максимальное подмножество, в котором все отрезки между точками черные. Если в нем менее k точек, добавим к нему несколько точек, чтобы получилось k-точечное множество K. Остальные точки образуют $(n-k)$-точечное множество L. Применяя к нему предположение индукции, получаем что в нем не более $\frac{k-1}{2k}((n-k)^2-r^2)+\frac{r(r-1)}{2}$ черных отрезков. Для каждой точки x из L во множество K выходит не более $k-1$ черных отрезков (потому, что в противном случае, добавляя x к выбранному максимальному подмножеству, получаем большее подмножество, в котором все отрезки черные), поэтому общее число черных отрезков не больше

$$\frac{k-1}{2k}((n-k)^2-r^2)+\frac{r(r-1)}{2}+(n-k)(k-1)+\frac{k(k-1)}{2} = \\ = \frac{k-1}{2k}(n^2-r^2)+\frac{r(r-1)}{2}.$$

Покажем, что оценка теоремы всегда достигается. Действительно, разобьем n точек на r групп по $q+1$ точке и $k-r$ групп по q точек. Точки из разных групп соединим черными отрезками, а точки из одной группы — белыми (получается k-дольный граф, если использовать терминологию теории графов; это единственный такой граф, у которого доли различаются по количеству вершин не более чем на 1). Очевидно, среди любых $k+1$ точки найдется пара точек, лежащие в одной группе и соединенные поэтому белым отрезком. Общее число белых отрезков равно $r(q+1)q/2+(k-r)q(q-1)/2 = (n(q-1)+r(q+1))/2$, поэтому общее число черных отрезков равно

$$n(n-1)/2 - (n(q-1)+r(q+1))/2 = \frac{k-1}{2k}(n^2-r^2) + \frac{r(r-1)}{2}.$$

На самом деле экстремальный турановский граф всегда определяется однозначно. Это мы предоставляем доказать читателю самостоятельно.

В книге [8] доказательство теоремы Турана опущено, «как не содержащее вероятностных аспектов». С того времени найдены и такие доказательства, см. [9], где эта теорема выводится из следующей теоремы Каро и Уэя.

Обозначим d_v степень вершины v в данном графе (в нашей терминологии это число *белых* отрезков, выходящих из точки v), и через k — максимальный размер *независимого множества вершин* в этом графе (в независимом множестве никакие две точки не соединяются ребром; в нашей в нашей терминологии это означает, что что среди любых его $k+1$ точек найдется хотя бы одна пара, соединенная белым отрезком, и найдется множество из k точек, соединенных только черными отрезками). Тогда справедлива

Теорема 3 (Каро – Уэй). *Имеет место неравенство*

$$k \geqslant \sum_v \frac{1}{d_v+1}.$$

Еще три доказательства теоремы Турана имеются в [10].

Частным случаем теоремы Турана (на самом деле открытом в 1907 г. Мантелем [11]) является следующая теорема, предлагавшаяся в качестве задачи в 1969 г. на Всесоюзной олимпиаде школьников при $n = 20$.

Теорема 4 (Мантель). *В компании из n человек среди любых трех найдется хотя бы одна пара незнакомых. Тогда число пар знакомых не больше $n^2/4$.*

Теорему эту несложно доказать по индукции (повторяя в этом частном случае доказательство общей теоремы), но у нее есть красивое и более короткое доказательство, предложенное болгарскими математиками Хаджиивановым и Неновым.

Вот оно. Пусть наибольшее число знакомых у одного человека равно a. Рассмотрим этого человека и всех незнакомых с ним. Очевидно в этой компании $n-a$ человек, а остальные a человек не знакомы друг с другом (так как знакомы с одним человеком). Каждый из первой компании имеет не более a знакомых, поэтому общее число пар знакомых не более $a(n-a)$ (так как знакомых, не принадлежащих этой компании, быть не может). Остается заметить, что $a(n-a) \leqslant n^2/4$.

Подобным же методом можно доказать более общее утверждение, являющееся некоторым ослаблением теоремы Турана (но при n кратном k совпадающей с ней).

Теорема 5. *Пусть в компании из n человек среди любых $(k+1)$ из них найдется хотя бы одна пара незнакомых. Тогда число пар знакомых не больше*

$$\frac{k-1}{2k}n^2.$$

Действительно, применим индукцию по k. База индукции ($k=2$) уже доказана. Выполним шаг индукции. Пусть наибольшее число знакомых у одного человека равно a. Рассмотрим этого человека и всех незнакомых с ним. Очевидно в этой компании $n-a$ человек, а для остальных a человек верно следующее: среди любых k из них найдутся двое незнакомых. Поэтому согласно предположению индукции общее число знакомых пар во второй компании не больше $\frac{k-2}{2(k-1)}a^2$. Каждый из первой компании имеет не более a знакомых, поэтому общее число пар знакомых не более

$$a(n-a)+\frac{k-2}{2k-2}a^2 = \frac{2k-2}{k}\frac{ka}{2k-2}(n-\frac{ka}{2k-2}) \leqslant \frac{2k-2}{k}\frac{n^2}{4} = \frac{k-1}{2k}n^2.$$

В книге [6] в виде задачи (но без решения) приведено некоторое усиление теоремы Мантеля. В частном случае $n=8$ эта задача предлагалась автором в 1983 году на Московской олимпиаде в следующем виде.

Теорема 6. *В пространстве выбрано n точек, никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Проведен $\lfloor n^2/4\rfloor+1$ отрезок, у каждого из которых оба конца являются выбранными точками. Доказать, что эти отрезки образуют не менее $\lfloor n/2\rfloor$ треугольников, причем большего количества треугольников может и не получиться. Если же проведен $\lfloor n^2/4\rfloor$ отрезок, то треугольников может не быть вообще.*

Здесь $\lfloor x\rfloor = \max\{n : n \leqslant x, n \in \mathbb{N}\}$ — функция *целая часть снизу*.

Доказательство читатель может найти в сборнике задач московских олимпиад [13].

4. Отступление в сторону: проблема Турана

Туран поставил следующую проблему, решение которой было бы обобщением его теоремы. Нужно найти $T(n,k,l)$ — наименьшее число l-элементных подмножеств в данном n-элементном множестве E_n таких, что любое k-элементное подмножество E_n обязательно содержит хотя бы одно из этих l-элементных подмножеств (сейчас числа $T(n,k,l)$ называются, разумеется, *числами Турана*). В случае $l = 2$ получается в точности теорема Турана.

Если произвольному l-элементному подмножеству M множества E_n сопоставить множество $S_k(M)$ всех k-элементных подмножеств множества E_n, содержащих M, то задача Турана превращается в частный случай общей *задачи о покрытии*, точнее задачи о нахождении минимального покрытия данного множества подмножествами из заданной системы его подмножеств. В качестве этого множества нужно взять множество $P_k(E_n)$ всех k-элементных подмножеств E_n, а в качестве данной системы его подмножеств — все определенные выше множества $S_k(M)$.

Любую конкретно заданную задачу о покрытии можно решить тривиальным переборным алгоритмом. Но такие алгоритмы требуют экспоненциального (относительно мощности заданной системы подмножеств) числа используемых в них элементарных операций. Существование алгоритма с полиномиальным числом операций для произвольной задачи о покрытии (и даже многих ее частных случаев) проблематично — этот вопрос равносилен так называемой *проблеме об NP-полноте*.(К этой же проблеме сводится вопрос о существовании полиномиального алгоритма находящего максимальное независимое подмножество в любом заданном графе; примером задачи о нахождении максимального независимого множества является известная задача о расстановке максимального числа не угрожающих друг другу ферзей на шахматной доске.) Проблема об NP-полноте видимо еще долго будет ждать своего решения. Поэтому не удивительно, что вопрос Турана о вычислении точного значения $T(n,k,l)$ в общем случае тоже пока остается без ответа. Несколько частных случаев, в которых ответ известен (часть из них была найдена Катоной, Неметцем, Симановичем, а остальные — А. Ф. Сидоренко), перечислены в [12]. Сам Туран предположил, что $T(2n,5,3) = 2\binom{n}{3}$, но кажется и эта очень естественная гипотеза пока не доказана. Верхние и нижние оценки для $T(n,k,l)$ приведены в [8]. Наиболее простую из них, а именно

$$T(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l},$$

читатель может попробовать доказать самостоятельно.

В [8] введены также еще три комбинаторных числа, определения которых похожи на определение чисел Турана $T(n,k,l)$. Например, *число Эрдёша – Ханани* $M(n,k,l)$, в каком-то смысле двойственное к числу Турана $T(n,k,l)$. Действительно, $T(n,k,l)$ можно определить как минимальное число l-множеств, покрывающих все k-множества, а $M(n,k,l)$ определяется как минимальное число k-множеств, покрывающих все l-множества (это значит, что каждое l-множество содержится хотя бы в одном из выбранных k-множеств). Тот, кто знает, что такое *n-мерный двоичный куб* (иногда называемый *булеаном*), обе эти задачи легко сможет сформулировать в терминах минимальных покрытий множества всех вершин k-слоя n-мерного куба вершинами l-го слоя и наоборот.

Читатель легко сам докажет, что

$$M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l} / \binom{k}{l}.$$

Равенство здесь возможно тогда и только тогда, когда существует такая система k-множеств, в которой любые два множества не имеют общего l-множества (т. е. имеют пересечение мощности меньшей l), и каждое l-множество содержится в одном (и только в одном) k-множестве. Такие системы множеств известны под названием *тактических конфигураций* и активно изучаются в конструктивной комбинаторике. В частном случае $k = 3$, $l = 2$ общие тактические конфигурации превращаются в так называемые *тройки Штейнера* (названные в честь знаменитого геометра).

С задачей Эрдёша – Ханани о вычислении $M(n,k,l)$ дела обстоят, по-видимому, лучше, чем с задачей Турана. В 1985 г. Рёдль доказал гипотезу Эрдёша – Ханани о том, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n,k,l)}{\binom{n}{l}/\binom{k}{l}} = 1.$$

Здесь пора закончить слишком затянувшееся отступление и вернуться к основной теме.

5. Еще одна задача Эрдёша

Для конкретного применения теоремы Эрдёша – Турана – Шош надо уметь вычислять в явном виде функцию $k_d(a)$. Эта задача очевидно сводится к вычислению функции $m_d(n)$, определение которой дается ниже в частном случае $d = 2$ (в общем случае оно дается аналогично).

Обозначим $m(M)$ минимальное расстояние между точками n-элементного множества M, а через $m_2(n)$ обозначим максимальное значение $m(M)$, которое может быть у n-точечного плоского множества M единичного диаметра. Аналогичная величина для трехмерных множеств обозначается $m_3(n)$.

Читателю предлагается самому проверить, что $k_d(a) = n$ если и только если $m_d(n+1) \leqslant a < m_d(n)$.

Очевидно, что $m_2(2) = m_2(3) = 1, m_3(2) = m_3(3) = m_3(4) = 1$.

Чуть менее очевидно, что $m_2(4) = 1/\sqrt{2}$. Единственная экстремальная конфигурация в этом случае есть есть просто квадрат с единичной диагональю. Действительно, если выпуклая оболочка есть треугольник (возможно вырождающийся в отрезок), то одна из его сторон видна из четвертой точки (лежащей внутри его) под углом не меньшим $2\pi/3$, поэтому согласно теореме косинусов квадрат длины этой стороны не меньше $2m(M)^2 + 2m(M)^2 \cos 2\pi/3 = 3m(M)^2$, откуда имеем, что $m(M) \leqslant 1/\sqrt{3} < < 1/\sqrt{2}$, и, если наконец M совпадает с множеством вершин выпуклого четырехугольника, то наибольший из его углов тупой или прямой, поэтому согласно теореме косинусов квадрат длины лежащей против него диагонали не меньше $2m(M)^2$, откуда имеем, что $m(M) \leqslant 1/\sqrt{2}$, причем равенство возможно лишь когда все углы четырехугольника прямые и все его стороны равны, т. е. он является квадратом.

Покажем, что $m_2(5) = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, и единственная экстремальная конфигурация есть правильный пятиугольник с единичной диагональю.

Действительно, если конфигурация образует выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (возможно вырожденный), то производя, если нужно, перестановку в обозначениях, можно считать, что угол ABC не меньше $3\pi/5$ (так как если все углы пятиугольника меньше $3\pi/5$, то их сумма меньше 3π, а это невозможно). Тогда согласно теореме косинусов $1 \geqslant |AC|^2 \geqslant 2m(M)^2 + 2m(M)^2 \cos 3\pi/5$, откуда (после некоторых вычислений) имеем, что $m(M) \leqslant \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, причем равенство возможно лишь когда все углы и все стороны у пятиугольника равны, т. е. он правильный. Если выпуклая оболочка множества M есть четырехугольник или треугольник (возможно вырождающийся в отрезок), то одна из точек M лежит внутри или на границе треугольника (возможно вырожденного), образованного тремя другими точками M, а в этом случае, как уже было показано выше, $m(M) \leqslant 1/\sqrt{3} < \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Эрдёш и Бейтмен [14] доказали, что

$$m_2(6) = \frac{1}{\sin 2\pi/5}, \quad m_2(7) = \frac{1}{2}.$$

Читатель легко сможет догадаться, какие конфигурации являются здесь экстремальными, но доказать это так просто не удается.

Известный немецкий логик Шютте в [15] доказал d-мерные теоремы, частным случаем которых является

Теорема 7. *Справедливы равенства*

$$m_3(5) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}, \quad m_3(6) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Докажем первое равенство. Пусть диаметр множества A, B, C, D, E равен 1. Возможны два случая (без учета вырожденных): одна точка (например E)лежит в тетраэдре с вершинами в других точках или $ABCDE$ — выпуклый шестигранник, являющийся объединением двух тетраэдров с общей гранью ($ABCD$ и $EBCD$). В первом случае одно из ребер, скажем AB, видно из E под углом φ, $\cos\varphi \leqslant -1/3$ согласно следующей далее лемме 1. Если предположить, что AE и BE больше $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, то из теоремы косинусов следует противоречие:

$$1 \geqslant |AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2 - 2|AE|\cdot|BE|\cos\varphi > \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = 1$$

Поэтому в этом случае $m(ABCDE) \leqslant \min\{AE, BE\} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Во втором случае прямая AE пересекает треугольник BCD в некоторой точке K. Согласно следующей далее второй лемме этот треугольник можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$, поэтому круги с этим радиусом и центрами в B, C, D накрывают этот треугольник, а значит и точку K, поэтому можно считать, что $BK \leqslant 1/\sqrt{3}$. Поэтому в треугольнике AEB высота $BL \leqslant BK \leqslant 1/\sqrt{3}$. Можно считать, что L лежит на отрезке AE (иначе выберем в этом треугольнике меньшую высоту и сменим обозначения). Так как $AE \leqslant 1$, то можно считать, что $AL \leqslant 1/2$. Тогда из теоремы Пифагора следует, что

$$|AB|^2 = |BL|^2 + |AL|^2 \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Поэтому $m(ABCDE) \leqslant AB \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Если выбрать A, B, C, D, E так, что $BC = CD = BD = AE = 1$, $AE \perp BCD$, $AE \cap BCD = K$, $BK = CK = DK = 1/\sqrt{3}$, то

$$m(ABCDE) = EB = EC = ED = AB = AC = AD = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Нужная далее следующая лемма предлагалась автором в качестве задачи в 1982 г. на Всесоюзной олимпиаде.

Лемма 1. *Для любой внутренней точки тетраэдра одно из его ребер видно под углом, косинус которого не больше* $-1/3$.

Ее доказательство можно найти в сборнике задач всесоюзных олимпиад [16].

Мы приведем другой вариант доказательства. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — единичные вектора, направленные из данной точки в вершины тетраэдра. Прямая, проходящая через e_4, пересекает трехгранный угол, образованный векторами e_1, e_2, e_3, поэтому для некоторых $x_i \geqslant 0$ имеем $x_1e_1 + \ldots + x_4e_4 = 0$. Возводя это равенство скалярно в квадрат и предполагая, что косинусы всех попарных углов между этими векторами больше $-1/3$, имеем

$$0=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_i(e_i,e_j)>\sum_{i=1}^{4}x_i^2-\frac{2}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_i=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2\geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Система векторов, ведущих из центра правильного тетраэдра (в d-мерном пространстве — правильного симплекса) в его вершины, оказывается, называется *фреймом Мерседес-Бенц.* (см. [17]).

Лемма 2. *Справедливо неравенство $R\leqslant D/\sqrt{3}$, где под R понимается радиус наименьшего круга, накрывающего треугольник диаметра D.*

Действительно, диаметр — это наибольшая сторона, а угол против нее не больше $60°$. Следовательно она видна из центра описанного круга под углом не больше $120°$. Лемма доказана.

Второе равенство легко вытекает из не очень просто доказываемой теоремы Шютте о том, что множество $\{M_1,\dots,M_n\}$ точек в трехмерном пространстве, такое, что все углы $M_iM_jM_k$ острые, существует лишь при $n=3,4,5$. Действительно, если множество M состоит из шести точек, то согласно указанной теореме в нем найдется тупоугольный или прямоугольный треугольник, тогда квадрат его наибольшей стороны по теореме косинусов не меньше $2m(M)^2$, откуда имеем, что $m(M)\leqslant 1/\sqrt{2}$. Интересно, что равенство здесь достигается на двух различных конфигурациях. Одна из них — это правильный октаэдр с единичной диагональю, а вторая — правильная треугольная призма с квадратными боковыми гранями. За доказательством упомянутой теоремы Шютте читатель отсылается к книге [2], задача 32.

Читателю предлагается самому доказать, что $m_2(n)$ и $m_3(n)$ монотонно убывают (после указанных выше точных значений при малых n.) Точные формулы для этих последовательностей, кажется, неизвестны.

В [2] можно найти доказательство неравенств $\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant m_2(n)\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}$, а в книге [18] — доказательство следующей теоремы более точной теоремы

Теорема 8 (Фейеш-Тот). *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}m_2(n)\sqrt{n}=\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}.$$

Известно, что существует $\lim_{n\to\infty}m_3(n)\sqrt[3]{n}$.

Читатель теперь легко сам докажет, что

$k_2(a)=3$ при $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant a<1$,

$k_2(a)=4$ при $\frac{2}{1+\sqrt{5}}\leqslant a<\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$k_2(a) = 5$ при $\frac{1}{\sin 2\pi/5} \leqslant a < \frac{2}{1+\sqrt{5}}$,
$k_2(a) = 6$ при $\frac{1}{2} \leqslant a < \frac{1}{\sin 2\pi/5}$,
$k_2(a) \geqslant 7$ при $a < \frac{1}{2}$,
$k_3(a) = 4$ при $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}} \leqslant a < 1$,
$k_3(a) = 5$ при $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant a < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$,
$k_3(a) \geqslant 6$ при $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Задача Винце

Довольно близка к задаче Эрдёша следующая задача (по-видимому, предложенная Эрдёшем Винце). Найти $d(n)$ — максимальное значение $m(M)$, которое может быть у выпуклого n-угольника единичного диаметра.

Очевидно $d(3) = 1$.

Чуть менее очевидно, что $d(4) = 1/\sqrt{2}$.

Винце [19] доказал, что справедлива

Теорема 9. *Для n, не равного степени двойки,* $d(n) = 2\sin\frac{\pi}{2n}$.

Читатель легко сам докажет эту теорему, если воспользуется теоремой Рейнхардта (см. [20]). Для n, равного степени двойки, кажется, ответ неизвестен. Винце доказал, что для $n = 8$

$$d(8) > 2\sin\frac{\pi}{16}.$$

Обобщениями этой теоремы на многомерные пространства, видимо, никто не занимался.

7. О возможных обобщениях на произвольные метрические пространства

Функции $k_d(a)$ и $m_d(n)$ можно определить конечно не только для d-мерного евклидова пространства, но и для любого метрического пространства вообще, и тем самым обобщить теорему Эрдёша-Шош-Турана на произвольное *метрическое пространство.* Для некоторых пространств при этом задача о вычислении $k(a)$ и $m(n)$ оказывается совсем несложной. Например, если метрика в d-мерном действительном пространстве определяется равенством

$$\rho(x,y) = \max_i |x_i - y_i|, \quad x = (x_1,\ldots,x_d), y = (y_1,\ldots,y_d),$$

(иногда эту метрику называют *манхеттенской* или *метрикой городских улиц*), то

$$m(n) = \frac{1}{\lceil n^{1/d} \rceil - 1},$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n : n \geqslant x, n \in \mathbb{N}\}$ — функция *целая часть сверху*. Читатель легко докажет этот факт самостоятельно.

В двумерном пространстве с метрикой

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

функция $m(n)$ остается такой же. Однако уже в трехмерном пространстве все не так очевидно.

Задача о вычислении функции $m(n)$ для произвольного метрического пространства довольно близка к известной в теории приближений (поставленной в пятидесятые годы А. Н. Колмогоровым) задаче о вычислении *ϵ-емкости* компактных множеств. В теории приближений эта задача рассматривается в функциональных пространствах, которые в наиболее интересных случаях бесконечномерны. В конечномерных пространствах эта задача близка к известной с двадцатых годов задаче *о плотнейшей упаковке шаров* в пространстве (см. [18], [21]), задаче об упаковке кругов на сфере (см. [18]) и различным задачам о расположении точек на сфере (см., например, [17]). В дискретных пространствах с *метрикой Хэмминга* задача о плотнейшей упаковке шаров играет важную роль в *теории кодирования* с исправлением ошибок (см., например, [21]).

8. Задача Хопфа о диаметрах конечного множества

Рассмотрим частный случай задачи вычисления $N_d(a, n)$ при $a = 1$, который однако не покрывался доказательством теоремы Эрдёша – Шош – Турана. Это просто задача о максимальном числе диаметров у данного n-точечного множества.

Справедлива следующая

Теорема 10 (Хопф – Панвиц). *Максимальное число диаметров в n-угольнике (и в любом n-точечном множестве) равно n.*

В качестве задачи эта теорема предлагалась в 1965 году на международной олимпиаде. Одно из ее решений можно прочесть в сборнике задач международных олимпиад [23].

Эта теорема вытекает также из следующей теоремы, предлагавшейся в виде задачи в 1962 году на одной из венгерских олимпиад (почему вытекает, читатель легко сообразит сам).

Теорема 11. *Если в n-угольнике выбрано m попарно пересекающихся сторон или диагоналей, то $m \leqslant n$.*

В книге [24] приведено четыре (!) доказательства этой теоремы.

Далее предлагается еще одно доказательство, разбитое на задачи, оставленные читателю для самостоятельного решения.

Для произвольной фигуры M обозначим $b_M(\varphi)$ *длину проекции* этой фигуры на прямую, выходящую под углом φ из начала координат. Функция $b_M(\varphi)$ очевидно определена на отрезке от нуля до π и ее можно периодически продолжить на всю числовую ось с периодом π.

Шириной плоской фигуры называется минимальная ширина бесконечной полосы с параллельными прямыми краями, накрывающей эту фигуру.

Задача 1. Докажите, что минимум функции $b_M(\varphi)$ равен ширине фигуры M.

Здесь уместно сказать, что фигура, называется *фигурой постоянной ширины*, если для любой прямой минимальная ширина содержащей эту фигуру полосы с краями, параллельными этой прямой, не зависит от этой прямой. У этих фигур есть много интересных свойств (см. например [25]). Легко доказать (но это далее не понадобится), что диаметр фигуры постоянной ширины равен ее ширине.

Задача 2. Докажите, что если M — n-угольник, то функция $b_M(\varphi)$ непрерывна и имеет на отрезке от нуля до π поровну локальных максимумов и минимумов, причем и тех и других не более n.

Задача 3. Выведите из предыдущей задачи теорему Хопфа – Панвица.

Для $d = 3$ аналог теоремы Хопфа – Панвица имеет следующий вид $N_3(1, n) = 2n - 2$ и был доказан независимо в 1957 г. Грюнбаумом, Хеппешем и Страшевичем. Это довольно сложное доказательство можно прочесть в [2]. В многомерном случае, кажется, известны только верхние и нижние оценки, полученные Эрдёшем (см. [2]).

В заключение отметим, что есть еще много других задач о диаметрах точечных множеств, например связанных с *проблемой Борсука.* Заинтересовавшийся этим читатель может обратится к статье [26] и брошюре [27] и указанной в них литературе.

Список литературы

[1] Эрдёш П. *Aufgabe* 250. Elemente der Mathematik 10, 1955.

[2] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.* М.: Наука, 1974.

[3] Turan P. *On an extremal problem in graph theory* // Mat.Fiz.Lapok, 48 : 436–452.

[4] Оре О. *Теория графов* (любое издание).

[5] Зыков А.А. *Основы теории графов.* М.: Вузовская книга, 2004.

[6] Харари Ф. *Теория графов.* М.: Мир, 1973.

[7] Дистель Р. *Теория графов.* Новосибирск, изд. Института математики, 2002.

[8] Эрдёш П., Спенсер Дж. *Вероятностные методы в комбинаторике.* М.: Мир, 1976.

[9] Алон Н., Спенсер Дж. *Вероятностный метод.* М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[10] Айгнер М., Циглер Г. *Доказательства из книги.* М.: Мир, 2006.

[11] Mantel W. Wisk. Opgaven 10 (1907), стр.60.

[12] Баранов В.И., Стечкин Б.С. *Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения.* М.: Физматлит, 2004.

[13] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. *Московские математические олимпиады.* М.: Просвещение, 1986.

[14] Эрдёш П., Бейтман П. *Геометрические экстремумы, подсказанные одной леммой Безиковича* // Amer. Math. Monthly, 58(5), 1951, стр. 306–314.

[15] Шютте К. *Минимальный диаметр конечных точечных множеств с заданным минимальным расстоянием между двумя точками* // Math. Annalen, 150 (1963), стр. 91–98.

[16] Васильев Н.Б., Егоров А.А. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* М.: Наука, 1988.

[17] Истомина М.Н., Певный А.Б. *О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц* // Математическое просвещение, вып.11, 2007, 105-112, МЦНМО.

[18] Фейеш Тот Л. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве.* М.: Физматгиз, 1958.

[19] S.Vincze *On a geometrical extremum problem* // Acta Scientiarum mathematicarum (Szeged) 12A, 1950, p. 136-142.

[20] Гашков С.Б. *Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта* // Математическое просвещение, вып. 11, 2007, 91-103, МЦНМО.

[21] Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решетки и группы.* М.: Мир, 1990.

[22] Хопф Х., Панвиц Е. *Aufgabe* 167 // Jahresbericht Deutch. Math. Vereinigung 43, 1934, стр. 114.

[23] Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. *Международные математические олимпиады.* М.: Просвещение, 1976.

[24] *Венгерские математические олимпиады.* М.: «Мир», 1976.

[25] Яглом И.М., Болтянский В.Г. *Выпуклые фигуры.* М.-Л. Гостехиздат, 1951.

[26] Скопенков А.Б. *n-мерный куб, многочлены и решение проблемы Борсука* // Математическое просвещение, вып. 3, 1999, 184-188, МЦНМО.

[27] Райгородский А.М. *Проблема Борсука.* Изд. МЦНМО, 2006.

С. Б. Гашков: механико-математический факультет МГУ
e-mail: gashkov@lsili.ru