Изогональное сопряжение и задача Ферма

Г. Ганчев Н. Николов

1. Введение

Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Пусть дан треугольник ABC и две точки X, Y. Если X, Y изогонально сопряжены, то

$$\pm\frac{AX \cdot AY}{AB \cdot AC} \pm \frac{BX \cdot BY}{BC \cdot BA} \pm \frac{CX \cdot CY}{CA \cdot CB} = 1, \tag{1}$$

причем, если число отрицательных слагаемых в левой части четно, то условие изогональной сопряженности является и необходимым.

В разделе 2 дано детальное описание геометрических конфигураций, в которых выполнено равенство (1).

Мы будем использовать (1) для геометрической интерпретации решения классической задачи Ферма с произвольными весами.

В разделе 3 будет решена задача Ферма для положительных весов: *Дан треугольник ABC и положительные числа λ, μ, ν. Найти точку Y, минимизирующую функцию*

$$\lambda AY + \mu BY + \nu CY.$$

В разделе 4 будет решена задача Ферма для одного отрицательного и двух положительных весов:

Дан треугольник ABC и положительные числа λ, μ, ν. Найти точку Y, минимизирующую функцию

$$-\lambda AY + \mu BY + \nu CY.$$

Мы покажем, как в общем случае по данным числам построить точку X, изогонально сопряженную искомой точке Y.

2. Соотношения, характеризующие изогональное сопряжение

Пусть k — описанная окружность треугольника ABC. Обозначим через i изогональное сопряжение относительно ABC. Мы не будем

Перевод А. А. Заславского.

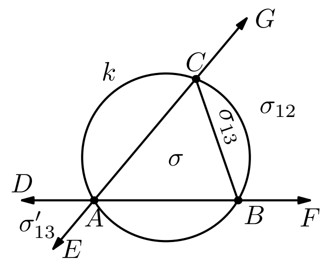

Рис. 1.

рассматривать точки k, отличные от вершин треугольника, и сопряженные им бесконечно удаленные точки.

На рис. 1 изображены области, на которые стороны треугольника и окружность k разбивают углы DAE и FAG.

Напомним, что

1) $i(\sigma) = \sigma$. При этом $i(M) = A$ для любой точки M отрезка BC, $i(M) = B$ для любой точки отрезка AC, $i(M) = C$ для любой точки отрезка AB.

2) $i(\sigma_{12}) = \sigma_{12}$. При этом $i(M) = C$ для любой точки луча BF, $i(M) = B$ для любой точки луча CG.

3) $i(\sigma_{13}) = \sigma'_{13}$, $i(\sigma'_{13}) = \sigma_{13}$. При этом $i(M) = C$ для любой точки луча AD, $i(M) = B$ для любой точки луча AE.

Пусть даны две точки X, Y. Докажем

Утверждение 1.

$$\frac{AX \cdot AY}{AB \cdot AC} + \frac{BX \cdot BY}{BC \cdot BA} + \frac{CX \cdot CY}{CA \cdot CB} \geqslant 1,$$

причем равенство достигается только когда X, Y изогонально сопряжены и лежат в области σ.

Доказательство. Будем рассматривать точки плоскости A, B, C, X, Y как комплексные числа a, b, c, x, y. Тогда требуемое неравенство примет вид

$$\left|\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)}\right| + \left|\frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)}\right| + \left|\frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}\right| \geqslant 1. \tag{2}$$

Чтобы доказать неравенство (2), достаточно заметить, что

$$\left|\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)}\right| + \left|\frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)}\right| + \left|\frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left|\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)} + \frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)} + \frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}\right|,$$

и
$$\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)}+\frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)}+\frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}=1. \tag{3}$$
При этом равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда все три числа
$$\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)},\quad \frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)},\quad \frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)} \tag{4}$$
действительны и неотрицательны. Числа (4) действительны тогда и только тогда, когда X и Y изогонально сопряжены. Если все они положительны, то точки X, Y лежат внутри треугольника ABC, если же одно из чисел равно нулю, то одна из этих точек совпадает с вершиной треугольника, а другая лежит на противоположной стороне. □

Обозначив $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, получим условие изогональной сопряженности внутренних точек в виде
$$a \cdot AX \cdot AY + b \cdot BX \cdot BY + c \cdot CX \cdot CY = abc.$$

Утверждение 2.
$$-\frac{AX \cdot AY}{AB \cdot AC}+\frac{BX \cdot BY}{BC \cdot BA}+\frac{CX \cdot CY}{CA \cdot CB} \geqslant -1,$$
причем равенство достигается только когда X, Y изогонально сопряжены и лежат в области σ_{12}.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего утверждения запишем требуемое неравенство в виде
$$\left|\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)}\right|-\left|\frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)}\right|-\left|\frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}\right| \leqslant -1. \tag{5}$$

Для доказательства (5) используем (3) и неравенство
$$\left|\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)}\right|-\left|\frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)}\right|-\left|\frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)}+\frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)}+\frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)}\right|.$$

Равенство в (5) достигается тогда и только тогда, когда все три числа действительны и выполнены неравенства
$$\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)} \geqslant 0,\quad \frac{(x-b)(y-b)}{(c-b)(a-b)} \leqslant 0,\quad \frac{(x-c)(y-c)}{(a-c)(b-c)} \leqslant 0. \tag{6}$$
Эти условия выполняются тогда и только тогда, когда X и Y изогонально сопряжены и лежат в области σ_{12}. □

Полученное условие изогональной сопряженности можно записать в виде
$$-a \cdot AX \cdot AY + b \cdot BX \cdot BY + c \cdot CX \cdot CY = -abc.$$

Отметим также, что для изогонально сопряженных точек X, Y, лежащих в $\sigma_{13} \cup \sigma'_{13}$ выполнено равенство
$$-\frac{AX \cdot AY}{AB \cdot AC} + \frac{BX \cdot BY}{BC \cdot BA} + \frac{CX \cdot CY}{CA \cdot CB} = 1, \tag{7}$$
или
$$-a \cdot AX \cdot AY + b \cdot BX \cdot BY + c \cdot CX \cdot CY = abc.$$

Однако, приведенное выше доказательство необходимости в этом случае не проходит. Удовлетворяет ли левая часть (7) какому-либо неравенству, неизвестно.

3. Задача Ферма для положительных весов

Для треугольника ABC обозначим: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, O, R — центр и радиус описанной окружности k, S — площадь.

Пусть $M \notin k$ — произвольная точка, $A_1B_1C_1$ — педальный треугольник M. Тогда, так как B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AM, $B_1C_1 = AM \sin\alpha = \dfrac{a\,AM}{2R}$. Аналогично, $C_1A_1 = \dfrac{b\,BM}{2R}$, $A_1B_1 = \dfrac{c\,CM}{2R}$.

Выясним теперь, как найти точку M, зная углы треугольника $A_1B_1C_1$. Воспользуемся следующим результатом.

Теорема 1 ([1]). *Пусть даны углы треугольника α_1, β_1, γ_1. Тогда*

i) *Существует единственная точка M внутри k, для которой углы педального треугольника $A_1B_1C_1$ равны α_1, β_1, γ_1. При этом треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ одинаково ориентированы.*

ii) *Если $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (\alpha, \beta, \gamma)$, то существует единственная точка N вне k, для которой углы педального треугольника $A_2B_2C_2$ равны α_1, β_1, γ_1. При этом треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ противоположно ориентированы.*

iii) *Точки M и N инверсны относительно k.*

Выясним теперь, при каких соотношениях между (α, β, γ) и $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ точка M лежит в σ, σ_{12}, σ_{13}, σ'_{13}.

Если M лежит внутри k, то (рис. 2)
$$\angle BMC = \alpha + \alpha_1, \quad \angle CMA = \beta + \beta_1, \quad \angle AMB = \gamma + \gamma_1. \tag{8}$$

Мы считаем, что $\angle BMC > \pi$, если A и M лежат по разные стороны от BC. Соответственно имеем:
$$M \in \sigma \Leftrightarrow \alpha + \alpha_1 < \pi, \quad \beta + \beta_1 < \pi, \quad \gamma + \gamma_1 < \pi.$$
$$M \in BC \Leftrightarrow \alpha + \alpha_1 = \pi, \quad \beta + \beta_1 < \pi, \quad \gamma + \gamma_1 < \pi.$$
$$M \in \sigma_{13} \Leftrightarrow \alpha + \alpha_1 > \pi, \quad \beta + \beta_1 < \pi, \quad \gamma + \gamma_1 < \pi.$$

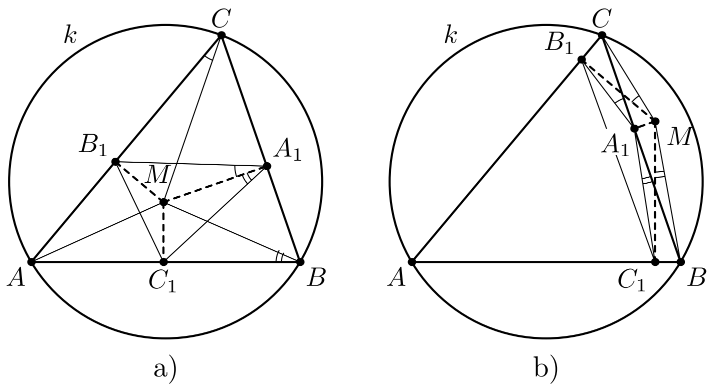

Рис. 2.

Используя (8), строим искомую точку M.

Если M — внутренняя точка треугольника, и N — изогонально сопряжена M, то из (8) и равенства $\angle BMC + \angle BNC = \pi + \alpha$ получаем

$$\angle BNC = \pi - \alpha_1, \quad \angle CNA = \pi - \beta_1, \quad \angle ANB = \pi - \gamma_1. \tag{9}$$

Пусть теперь M лежит вне k. Если M и A по разные стороны от BC, то (рис. 3) $\angle BMC = \alpha_1 - \alpha > 0$.

Следовательно

$$M \in \sigma_{12} \Leftrightarrow \beta > \beta_1, \quad \gamma > \gamma_1, \quad \alpha_1 > \alpha.$$

$$M \in \sigma_{13}' \Leftrightarrow \beta < \beta_1, \quad \gamma < \gamma_1, \quad \alpha_1 < \alpha.$$

Теперь рассмотрим задачу Ферма с положительными весами. Используя неравенство из утверждения 1, дадим геометрическую интерпретацию ее решения.

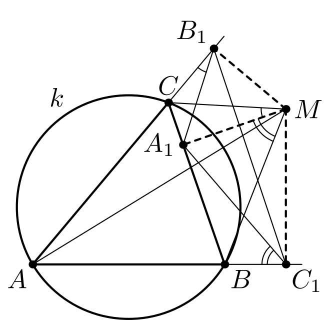

Рис. 3.

Задача 1. *Дан треугольник ABC и положительные числа λ, μ, ν. Найти точку Y, минимизирующую функцию*

$$F(Y) = \lambda AY + \mu BY + \nu CY. \tag{10}$$

Решение. Прежде всего отметим, что если, например, $\nu \geqslant \lambda + \mu$, то для любой точки Y

$$F(Y) \geqslant \lambda AY + \mu BY + (\lambda + \mu)CY = \lambda(AY + CY) + \mu(BY + CY) \geqslant F(C).$$

Поэтому будем считать, что существует треугольник со сторонами λ, μ, ν. Если α_1, β_1, γ_1 — углы этого треугольника, то минимизация (10) эквивалентна минимизации функции

$$f(Y) = AY \sin\alpha_1 + BY \sin\beta_1 + CY \sin\gamma_1.$$

По теореме 1 существует единственная точка X внутри k, для которой углы педального треугольника $A_1B_1C_1$ равны $\angle A_1 = \alpha_1$, $\angle B_1 = \beta_1$, $\angle C_1 = \gamma_1$. Обозначая через R_1 радиус описанной окружности $A_1B_1C_1$, получаем

$$f(Y) = \frac{1}{4RR_1}(a \cdot AX \cdot AY + b \cdot BX \cdot BY + c \cdot CX \cdot CY). \tag{11}$$

Рассмотрим два случая:

– X внутри или на границе треугольника ABC;

– X вне ABC.

В первом случае, применяя к (11) утверждение 1, получаем, что минимум $f(Y)$, равный $\frac{S}{4R_1}$, достигается, когда Y — точка, изогонально сопряженная X.

Точнее, если $\alpha + \alpha_1 < \pi$, $\beta + \beta_1 < \pi$, $\gamma + \gamma_1 < \pi$, то X лежит внутри ABC и минимум достигается на точке Y, изогонально сопряженной X. Если же, например, $\gamma + \gamma_1 = \pi$, то X лежит на стороне BC и $Y = C$.

Пусть теперь X вне треугольника ABC (рис. 4). Тогда $\gamma + \gamma_1 = \pi$.

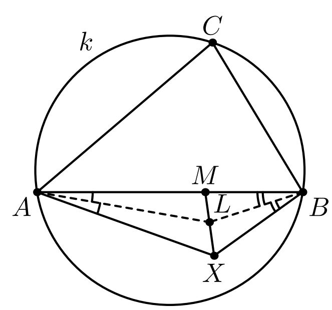

Рис. 4.

Пусть XM — биссектриса угла X треугольника AXB. Тогда для некоторого $q > 1$

$$AX = qAM, \quad BX = qBM.$$

Построим окружность Аполлония k_0 для точек M, X и отношения q. Она проходит через A, B и центр L вписанной в треугольник AXB окружности. Следовательно, C лежит внутри k_0 и $\frac{CX}{CM} > q$.

Подставив в (11) $AX = qAM$, $BX = qBM$, получаем

$$f(Y) = \frac{1}{4RR_1}(q(a \cdot AM \cdot AY + b \cdot BM \cdot BY + c \cdot CM \cdot CY) + c(CX - q \cdot CM)CY).$$

Так как $CX - qCM > 0$, минимум $f(Y)$, равный $\frac{qS}{R_1}$, достигается, когда Y изогонально сопряжена M, т. е. $Y = C$. □

4. Задача Ферма с весами разных знаков

В этом разделе будет рассмотрена задача Ферма с одним отрицательным и двумя положительными весами. Мы покажем, что ее можно свести к задаче с положительными весами.

Задача 2. *Дан треугольник ABC и положительные числа λ, μ, ν. Найти точку Y, минимизирующую функцию*

$$G(Y) = -\lambda AY + \mu BY + \nu CY. \tag{12}$$

Решение. Воспользуемся следующим соотношением между решениями задач 1 и 2.

Лемма [2]. *Если Q решение задачи 2, то*

i) *Q и A лежат по разные стороны от прямой BC;*

ii) *Для любой точки D, лежащей на луче, противоположном QA, точка Q является решением задачи 1 для треугольника BCD и весов λ, μ, ν.*

Доказательство. i) Достаточно заметить, что для точки Q, лежащей по ту же сторону от BC, что A, $G(Q) > G(Q')$, где Q' — точка, симметричная Q относительно BC.

ii) Пусть $F_D(Y) = \lambda DY + \mu BY + \nu CY$. Тогда

$$\begin{aligned} F_D(Y) - F_D(Q) - (G(Y) - G(Q)) = \lambda(DY + YA - (DQ + QA)) = \\ = \lambda(DY + YA - DA) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Поэтому, если Q — решение задачи 2, то

$$F_D(Y) - F_D(Q) \geqslant G(Y) - G(Q) \geqslant 0.$$ □

Из леммы следует, что точка Q (если задача 2 имеет решение) лежит в области $\sigma_{13} \cup BC \cup \sigma_{12}$.

Если $\lambda > \mu + \nu$, то

$$G(Y) \leqslant (\mu + \nu - \lambda)AY + \mu AB + \nu AC,$$

и задача не имеет решения.

Пусть $\lambda \leqslant \mu + \nu$. Тогда $G(Y) \geqslant -G(A)$, и значит, решение задачи 2 существует. Из леммы и решения задачи 1 следует, что искомой точкой будет:

B при $\mu > \lambda + \nu$; C при $\nu > \lambda + \mu$; B и/или C при $\lambda = \mu + \nu$.

Поэтому будем рассматривать случай, когда λ, μ, ν удовлетворяют неравенству треугольника. Обозначив соответствующие углы через α_1, β_1, γ_1, сведем задачу к минимизации функции

$$g(Y) = -\sin\alpha_1 AY + \sin\beta_1 BY + \sin\gamma_1 CY. \tag{13}$$

Предположим, что точка Q лежит в области σ_{13} (рис. 5)

Рассмотрим треугольник BCA', удовлетворяющий условиям леммы. Из решения задачи 1 следует, что $\angle BQA' = \pi - \gamma_1$, $\angle CQA' = \pi - \beta_1$, т. е. $\angle AQB = \gamma_1$, $\angle AQC = \beta_1$.

Кроме того

$$\beta_1 > \beta, \quad \gamma_1 > \gamma. \tag{14}$$

Возьмем вне k точку P, для которой углы педального треугольника равны α_1, β_1, γ_1. В силу (14) P лежит в области σ'_{13}, и так как $\angle BQC = \pi - \alpha_1$, $\angle AQC = \beta_1$, $\angle AQB = \gamma_1$, точки P и Q изогонально сопряжены. Поэтому

$$g(Q) = \frac{abc}{4RR_1},$$

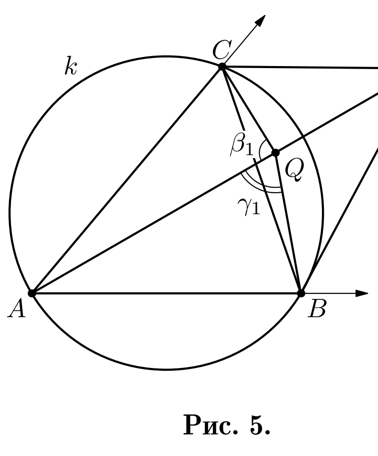

Рис. 5.

где R_1 — радиус педальной окружности P.

С другой стороны

$$g(B) = \frac{ac}{4RR_1}(PC - PA) < \frac{abc}{4RR_1} = g(Q),$$

что противоречит минимальности Q. Следовательно, Q не может лежать в σ_{13}.

Если Q лежит на дуге BC, то $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha$. Значит

$$g(Y) = \frac{1}{2R}(-aAY + bBY + cCY) \geqslant 0,$$

причем равенство достигается в точках дуги BC (теорема Птолемея).

Таким образом, решение задачи 2 достигается во всех точках дуги BC, не содержащей A.

Пусть Q лежит в области σ_{12}. Тогда $\beta_1 < \beta$, $\gamma_1 < \gamma$. Возьмем вне k точку P, педальный треугольник которой имеет углы α_1, β_1, γ_1. Рассуждая, как выше, получаем, что оптимальная точка Q изогонально сопряжена P и

$$g_{\min} = -\frac{abc}{4RR_1} = -\frac{S}{R_1}.$$

Во всех остальных случаях минимум достигается в точке B, C или обеих, в зависимости от того, выполнено ли $g(B) < g(C)$, $g(B) > g(C)$ или $g(B) = g(C)$.

Подводя итог, получаем:

1. При $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$ решением задачи 2 будет любая точка дуги BC, не содержащей A, $g_{\min} = 0$.

2. При $\beta_1 < \beta$, $\gamma_1 < \gamma$ решением будет точка Q, изогонально сопряженная P, и

$$g_{\min} = -\frac{S}{R_1}\,.$$

3. Если $\beta_1 > \beta$ или $\gamma_1 > \gamma$, то:

3.1. При $\dfrac{\sin\beta_1 - \sin\gamma_1}{\sin\alpha_1} > \dfrac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha}$ решением будет точка B;

3.2. При $\dfrac{\sin\beta_1 - \sin\gamma_1}{\sin\alpha_1} = \dfrac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha}$ решением будут точки B и C;

3.3. При $\dfrac{\sin\beta_1 - \sin\gamma_1}{\sin\alpha_1} < \dfrac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha}$ решением будет точка C.

Замечание. Стандартные вычисления показывают, что

$$\frac{\sin\beta_1 - \sin\gamma_1}{\sin\alpha_1} > \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma_1}{2} > \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\,.$$

Следовательно, решением при $\alpha_1 \neq \alpha$, $\beta_1 \geqslant \beta$, $\gamma_1 \leqslant \gamma$ ($\beta_1 \leqslant \beta$, $\gamma_1 \geqslant \gamma$) будет точка B (C).

Разбор вырожденных случаев задач 1, 2, когда точки A, B, C лежат на одной прямой и/или некоторые из весов равны нулю, мы оставляем читателю.

Список литературы

[1] Ganchev G. *Etudes on theme "Inversion"* // Mathematica plus, 1994. No 4. P. 24–32. (In Bulgarian)

[2] Jalal G., Krarup J. *Geometrical solution to the Fermat problem with arbitrary weights* // Annals of Operation Research, 2003. Vol. 123. P. 67–104.

Г. Ганчев, Н. Николов, Bulgarian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Informatics, Acad. G. Bonchev str., bl. 8, 1113 Sofia, Bulgaria

e-mail: `ganchev@math.bas.bg`
`nik@math.bas.bg`