Теоремы Штейнера и Понселе в геометриях Евклида и Лобачевского

П. В. Бибиков

1. Одно неравенство для многоугольника Лобачевского

В статье [4] приводится много красивых неравенств, связывающих разные характеристики выпуклого евклидова n-угольника. В этом разделе мы докажем одно аналогичное неравенство для случая n-угольника на плоскости Лобачевского.

Определение. *Радиусом Бляшке выпуклого n-угольника* назовем максимальный радиус лежащего в нем круга, который будем называть *кругом Бляшке*. Обозначим этот радиус через $r_n(M)$.

Теорема 1. *На плоскости Лобачевского для любого выпуклого n-угольника M выполнено неравенство*

$$r_n(M) \leqslant \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим для начала произвольный выпуклый n-угольник $A_1A_2\dots A_n$ в модели Клейна. Докажем, что его радиус Бляшке не превосходит радиуса Бляшке некоторого вырожденного n-угольника (т. е. n-угольника, все вершины которого лежат на абсолюте). Без ограничения общности можно считать, что центр круга Бляшке совпадает с центром граничного круга. Проведем прямые OA_k, пересекающие абсолют в точках A'_k (рис. 1). Тогда очевидно, что радиус Бляшке многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ не превосходит радиуса Бляшке вырожденного многоугольника $A'_1A'_2\dots A'_n$. Таким образом, достаточно найти максимальный радиус Бляшке для *вырожденного* n-угольника.

Опять-таки, можно считать, что центр круга Бляшке совпадает с центром граничного круга. В таком случае евклидова длина R_n и неевклидова длина r_n радиуса Бляшке многоугольника $A'_1\dots A'_n$ связаны соотношением

$$R_n = \operatorname{th} \frac{r_n}{2}.$$

Из этой формулы видно, что величина r_n максимальна тогда и только тогда, когда максимальна величина R_n. Учитывая, что с точки зрения

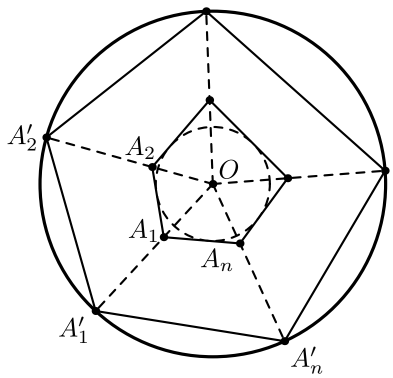

Рис. 1.

геометрии Евклида многоугольник $A_1' \dots A_n'$ вписан в окружность (абсолют) радиуса 1, с помощью неравенства, приведенного в статье [4], получаем:

$$R_n \leqslant \cos\frac{\pi}{n},$$

а значит,

$$r_n \leqslant \ln \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n},$$

что и требовалось.

Заметим, что если многоугольник $A_1' \dots A_n'$ является правильным (с точки зрения геометрии Евклида), то неравенство (1) обращается в равенство.

Рассмотрим более подробно эту ситуацию. Пусть $A_1' \dots A_n'$ — правильный (с точки зрения евклидовой геометрии) n-угольник, описанный вокруг неевклидовой окружности ω. При доказательстве теоремы 1 мы специально расположили многоугольник $A_1' \dots A_n'$ так, чтобы ω была также и евклидовой окружностью. Теперь же мы, наоборот, расположим многоугольник $A_1' \dots A_n'$ совершенно произвольно, тогда ω будет изображаться некоторым эллипсом.

Давайте теперь рассмотрим аналогичную картинку в модели Пуанкаре в круге. Как известно, прямыми в ней являются дуги окружностей, перпендикулярных граничной окружности. Дорисуем дуги $A_i'A_{i+1}'$ до окружностей, а саму граничную окружность сотрем. Легко видеть, что найдется окружность, касающаяся всех полученных окружностей.

Упражнение. Докажите это.

А теперь нарисуем эти две картинки рядом: то, что получилось в модели Пуанкаре в круге, и то, что получилось в модели Клейна (рис. 2 и 3).

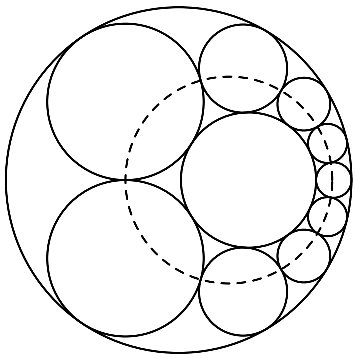

Рис. 2.

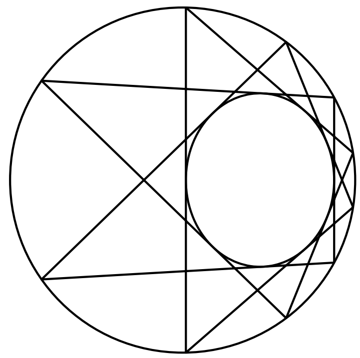

Рис. 3.

Посмотрим сначала на них, а потом на название статьи. Узнаете? Да это же поризмы Штейнера и Понселе!

2. Теоремы Штейнера и Понселе

Сначала напомним классические результаты Штейнера и Понселе.

Теорема 2 (Штейнер). *Возьмем на плоскости кольцо (т. е. две окружности, одна из которых расположена строго внутри другой) и начнем вписывать в него окружности C_1, C_2, …, каждая из которых касается предыдущей. Тогда если получившаяся цепочка окружностей замкнется (т.е. найдется такое натуральное n, что $C_k = C_{n+k}$ для всех $k \geqslant 1$), то при любом другом выборе начальной окружности C_1' соответствующая цепочка окружностей C_1', C_2', … тоже замкнется, причем количество окружностей в цепочках будет одинаковым.*

Классическое доказательство этой теоремы проводится применением инверсии: с ее помощью исходное кольцо можно привести к концентрическому, а для него утверждение теоремы очевидно. Однако такое доказательство не дает ответа на следующий естественный вопрос: для какого кольца существует замкнутая цепочка окружностей? Понятно, что любое кольцо однозначно с точностью до движений плоскости определяется тремя параметрами: радиусами a и b внешней и внутренней окружностей соответственно, а также расстоянием c между их центрами. Поэтому существование замкнутой цепочки из n окружностей определяет некоторое соотношение между величинами a, b, c и n. А именно, верна следующая

Теорема 3. *Для данного кольца цепочка из n окружностей замкнется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$\cos^2\frac{\pi}{n}=\frac{4ab}{(a+b)^2-c^2}\,. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 — центры соответственно внешней и внутренней окружностей кольца. Проведем через точку O_2 диаметр RS внешней окружности, пересекающий окружность внутреннюю в точках P и Q.

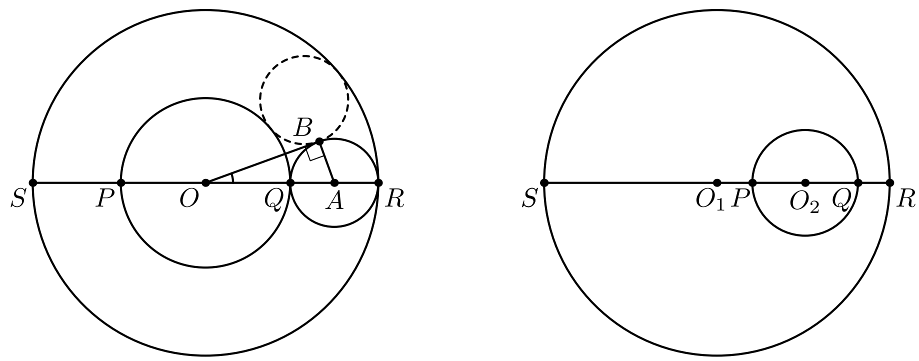

Рис. 4. **Рис. 5.**

Сначала рассмотрим случай $c=0$, т.е. случай концентрического кольца с центром в точке $O=O_1=O_2$ (рис. 4). Тогда, радиус вписанных в кольцо окружностей равен $\frac{a-b}{2}$. Пусть A — центр одной из таких окружностей, а B — точка ее касания со следующей окружностью кольца. Так как треугольник OBA прямоугольный, $\angle AOB=\frac{\pi}{n}$ и $OA=\frac{a+b}{2}$, то

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Эта формула тривиально преобразуется в формулу (2). Нам будет удобно записать ее в следующем виде:

$$[PQ,RS]=\frac{1}{\sin^2\pi/n}\,.$$

(Здесь $[PQ,RS]=\frac{RP}{RQ}:\frac{SP}{SQ}$ — стандартное двойное отношение.)

Рассмотрим теперь общий случай (рис. 5). Мы уже отмечали, что любое кольцо инверсией можно перевести в концентрическое. Осталось заметить, что при инверсии двойное отношение $[PQ,RS]$ не изменится! Нам остается только выразить величины RP, RQ, SP и SQ через a, b и c и подставить все в предыдущую формулу.

Упражнение. Завершите доказательство, проделав необходимые вычисления.

Упражнение. Докажите, что если цепочка окружностей замыкается после m оборотов, то в формуле 2 нужно заменить n на n/m.

Отметим, что экспонента от двойного отношения, используемого нами, есть не что иное, как расстояние между точками P и Q в модели Пуанкаре в круге геометрии Лобачевского, а его инвариантность относительно инверсии эквивалентна тому, что в этой модели инверсия является движением.

Другое доказательство приводится в [5].

Теорема 4 (Малая теорема Понселе). *Возьмем на плоскости кольцо и, начиная с произвольной точки A, впишем в него ломаную L со звеньями L_1, L_2, …(т. е. L_k является хордой внешней окружности и касательной внутренней при всех $k \geqslant 1$). Тогда если получившаяся ломаная замкнется (т. е. найдется такое натуральное n, что $L_k = L_{n+k}$ для всех $k \geqslant 1$), то при любом другом выборе начальной точки A' соответствующая ломаная L' тоже замкнется, причем количество звеньев в ломаных будет одинаковым.*

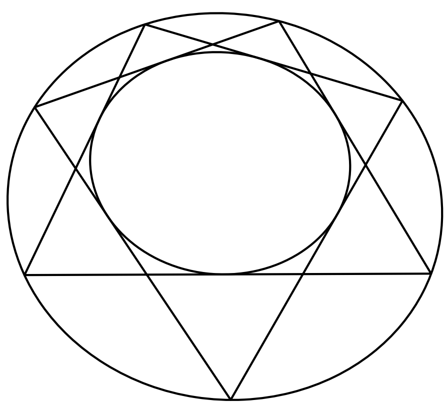

Рис. 6.

Элементарное (но непростое!) доказательство приводится в [6].

Если в теореме 4 заменить окружности на коники (рис. 6), то получится *большая теореме Понселе*. Ее доказательство приводится, например, в [2].

Теперь рассмотрим теоремы Штейнера и Понселе в геометрии Лобачевского.

Теорема 5. *В геометрии Лобачевского верны теорема Штейнера и малая теорема Понселе.*

Доказательство. Для доказательства теоремы Штейнера воспользуемся моделью Пуанкаре в верхней полуплоскости (рис. 7). Поскольку в этой модели окружность Лобачевского совпадает с окружностью Евклида, то справедливость теоремы Штейнера в геометрии Лобачевского равносильна ее справедливости в геометрии Евклида.

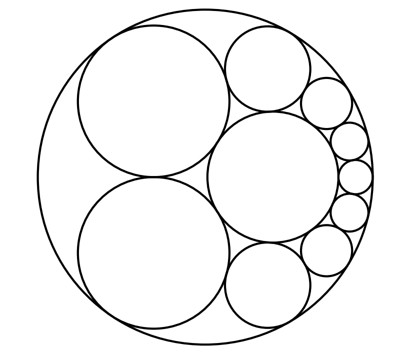

Рис. 7.

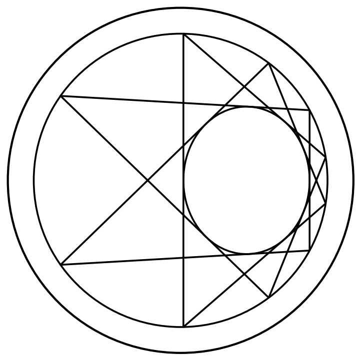

Рис. 8.

Для доказательства большой теоремы Понселе разумно воспользоваться все той же моделью Клейна (рис. 8). В ней окружности Лобачевского являются евклидовыми кониками, а прямая Лобачевского — отрезком. Поэтому справедливость малой теоремы Понселе в геометрии Лобачевского следует из справедливости большой теоремы Понселе в геометрии Евклида.

Визуально теоремы Штейнера и Понселе кажутся очень похожими. Действительно, ведь исходная конфигурация в них практически одинакова, только в одном случае в кольцо вписываются окружности, а другом — ломаная. Однако, несмотря на кажущееся сходство в формулировке, эти теоремы имеют принципиально разные доказательства, которые никак не демонстрируют взаимосвязь этих теорем.

Однако сейчас мы увидим, что между этими теоремами есть связь, и поможет нам в этом геометрия Лобачевского.[1)]

Рассмотрим большую теорему Понселе в следующем частном случае: внешняя коника является окружностью, а внутренняя — эллипсом, причем этот эллипс должен быть окружностью Лобачевского в модели Клейна

[1)] Адамар говорил, что часто путь между двумя вещественными результатами проходит через комплексное. А в данном случае путь между двумя евклидовыми теоремами проходит через неевклидову геометрию!

относительно внешней окружности (рис. 3). Тогда любая замкнутая ломаная, вписанная в полученное кольцо, является *вырожденным описанным многоугольником* (*возможно, самопересекающимся*) *в геометрии Лобачевского.*

Перейдем теперь в модель Пуанкаре в круге геометрии Лобачевского. В этой модели окружности Лобачевского совпадают с евклидовыми, а прямыми являются дуги окружностей, лежащие внутри абсолюта и перпендикулярные ему. Тогда предыдущая конфигурация примет следующий вид: эллипс станет окружностью, а звенья ломаной — дугами окружностей, каждая из которых касается предыдущей. Если теперь дополнить эти дуги до окружностей, то несложно показать (например, с помощью инверсии), что все они будут касаться (внутренним образом) еще одной окружности. А это как раз и есть теорема Штейнера.

Таким образом, мы фактически показали, что теорема Штейнера является частным случаем большой теоремы Понселе. Также интересен и обратный переход к теореме Понселе. К сожалению, таким способом получить ее доказательство в общем случае нельзя, поскольку окружность в модели Клейна геометрии Лобачевского — это не произвольный эллипс (у него, например, малая ось лежит на диаметре абсолюта).

Теперь с помощью теоремы Понселе в геометрии Лобачевского мы докажем следующую теорему евклидовой геометрии, которая является обобщением теоремы Штейнера и малой теоремы Понселе.

Теорема 6 (Эмх). *Возьмем на плоскости кольцо* (*т. е. две окружности, одна из которых расположена строго внутри другой*) *и окружность* ω, *лежащую в нем. Начнем вписывать в это кольцо окружности* $C_1, C_2, \ldots$, *каждая из которых проходит через точку пересечения предыдущей окружности с окружностью* ω (*рис.* 9). *Тогда если получившаяся*

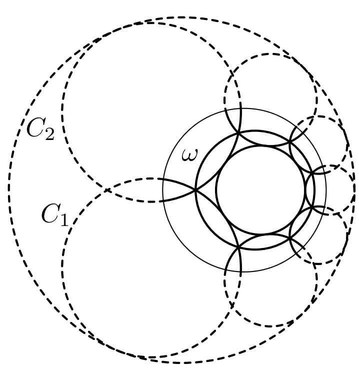

Рис. 9.

цепочка окружностей замкнется (т. е. найдется такое натуральное n, *что* $C_k = C_{n+k}$ *для всех* $k \geqslant 1$), *то при любом другом выборе начальной окружности* C'_1 *соответствующая цепочка окружностей* C'_1, C'_2, …*тоже замкнется, причем количество окружностей в цепочках будет одинаковым.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Штейнера, с помошью инверсии переведем граничные окружности кольца в концентрические. Тогда найдется окружность, перпендикулярная всем окружностям C_k кольца (докажите!). Мысленно сотрем все, что лежит вне этой окружности и внимательно посмотрим на то, что осталось. После секундного размышления становится понятно, что перед нами не что иное, как малая теорема Понселе в модели Пуанкаре в круге геометрии Лобачевского!

Упражнение. С помощью теоремы Эмха докажите теорему Штейнера и малую теорему Понселе.

Аналогично теореме 5, верна следующая

Теорема 7. *Теорема Эмха верна в геометрии Лобачевского.*

Упражнение. Докажите эту теорему.

Приведенный выше пример использования геометрии Лобачевского при доказательстве теорем геометрии Евклида является довольно редким и на практике встречается нечасто (см., например, [1, 3]).

Список литературы

[1] Андреев Е. *Невписываемые многогранники* // Квант, №8, 1970. С. 3–9.

[2] Берже М. *Геометрия. Том второй.* М.: Мир, 1984. С. 140–148.

[3] Гальперин Г. А. *Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 8. 2004. С. 102–109.

[4] Гашков С. Б. *Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2007. С. 91–103.

[5] Исмагилов Р. *Ожерелье Штейнера, или Любовь к вычислениям* // Квант, №2, 2003. С. 9–12.

[6] Шарыгин И. Ф. *Геометрия. Планиметрия. Задачник. 9–11 кл.* М.: Дрофа, 2001. С. 77, 235–236.

П. В. Бибиков, механико-математический факультет МГУ
e-mail: `tsdtp4u@proc.ru`