Параболические многоугольники

Ф. К. Нилов

В этой статье доказывается несколько теорем о криволинейном параболическом четырехугольнике.

Теорема 1. *Две параболы пересекаются в четырех точках. В полученный «параболический четырехугольник» можно вписать окружность тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны.* (См. рис. 1.)

По-видимому, этот красивый факт неизвестен, что подтверждается мнением авторов книги [1].

Формулировки остальных результатов

Сформулируем следующий известный факт.

Теорема 2. *Параболический четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда оси образующих его парабол перпендикулярны.* (См. рис. 2.)

Из теорем 1 и 2 будет выведено такое утверждение.

Следствие 1. *Любой параболический четырехугольник можно перевести аффинным преобразованием во вписанно-описанный параболический четырехугольник.*

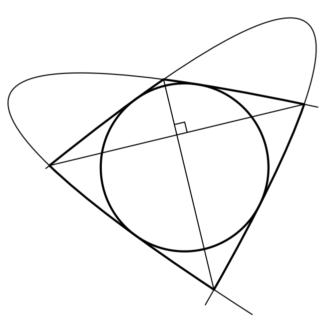

Рис. 1.

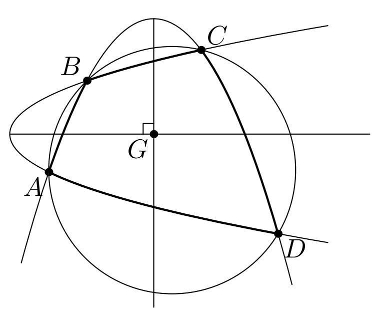

Рис. 2.

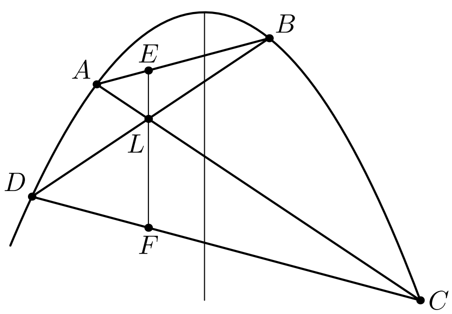

Рис. 3. $AE/EB = DF/FC$

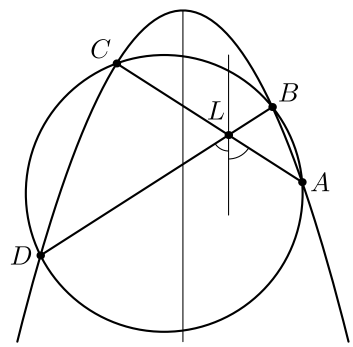

Рис. 4.

Из следствия 1 будет выведен еще один интересный результат.

Прямая EF называется *осевой прямой* выпуклого четырехугольника $ABCD$, если она проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника и пересекает прямые, содержащие стороны AB и CD в точках E и F, для которых $AE/EB = FD/CF$. Осевая прямая четырехугольника зависит от порядка расположения точек A, B, C и D.

Следствие 2. *На параболе лежат четыре точки A, B, C и D. Тогда ось параболы параллельна осевой прямой четырехугольника $ABCD$.* (См. рис. 3.)

Следующий факт будет выведен из следствия 2 как частный случай.

Следствие 3. *Парабола и окружность пересекаются в четырех точках A, B, C и D. Обозначим точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ через L. Тогда биссектриса угла ALD параллельна оси параболы.* (См. рис. 4.)

Следующее утверждение будет выведено из следствия 3.

Утверждение 1. *Точка пересечения осей парабол, образующих вписанный параболический четырехугольник, совпадает с центром тяжести соответствующего прямолинейного четырехугольника.* (На рис. 2 точка G — центр тяжести $ABCD$.)

Следующее утверждение сформулировано А. В. Акопяном и А. А. Заславским. Оно будет выведено из следствия 3 и леммы 1.

Теорема 3. *Внутри окружности взята точка X. Через нее проводятся N хорд, делящие плоскость на $2N$ равных углов. Через концы каждой хорды проводится парабола, касающаяся окружности в этих концах. Тогда вершины параболического $2N$-угольника, получающегося при пересечении этих парабол, лежат на одной окружности.*

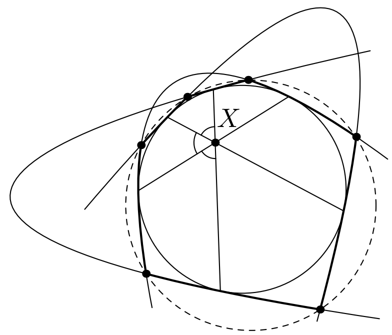

Рис. 5.

Утверждение 2. *Дан описанный параболический шестиугольник, причем любые две параболы, образующие его, пересекаются в четырех точках. Тогда его главные диагонали пересекаются в одной точке.*

Это утверждение будет выведено из леммы 1, сформулированной ниже.

Доказательство теоремы 1.

Сформулируем лемму 1, на которой основано доказательство теоремы 1.

Лемма 1. *Дана парабола, касающаяся окружности в точках A и B. Произвольная точка P плоскости лежит на этой параболе тогда и только тогда, когда расстояние от точки P до прямой AB равно длине касательной, проведенной из точки P к окружности.* (См. рис. 6.)

Доказательство этой леммы приведем позже.

Доказательство части «только тогда» теоремы 1. Обозначим точки касания окружности, вписанной в параболический четырехугольник, с одной параболой через K и L, а с другой — через M и N (см. рис. 7). Рассмотрим одну из вершин A параболического четырехугольника. Из части «только тогда» леммы 1 следует, что расстояния от точки A до прямых KL и MN равны длине касательной, проведенной из A к окружности. Значит, вершина A равноудалена от прямых KL и MN. Аналогичное верно и для других вершин. Поскольку прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных прямыми KL и MN, являются диагоналями четырехугольника $ABCD$, то диагонали этого четырехугольника перпендикулярны. □

Основная идея доказательства части «тогда» теоремы 1 принадлежит А. А. Заславскому.

Доказательство части «тогда» теоремы 1. Пусть $ABCD$ — параболический четырехугольник с перпендикулярными диагоналями (см.

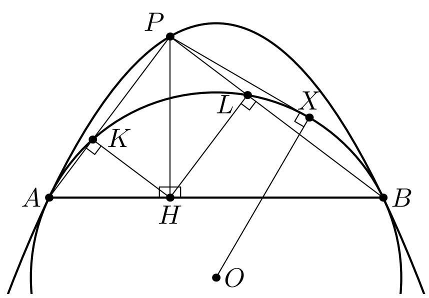

Рис. 6.

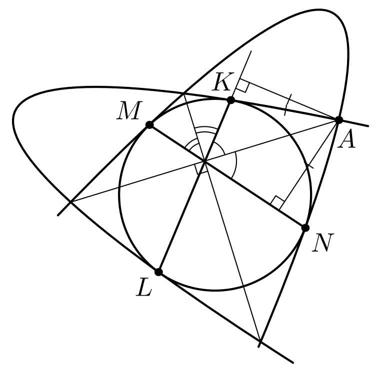

Рис. 7.

рис. 8). Обозначим через L точку пересечения его диагоналей. Известно, что проекции точки L на прямые AB, BC, CD и DA лежат на одной окружности. Докажем, что эта окружность вписана в параболический четырехугольник. Можно считать, что существует такая прямая l_1, проходящая через точку L, что расстояние a от этой прямой до точки A равно длине касательной t_a из точки A к окружности.

(Покажем, почему такая прямая существует. Будем считать, что центр I этой окружности лежит в той же полуплоскости относительно прямой BD, что и точка A. Тогда $\angle ILA$ острый. Существование такой прямой по соображениям непрерывности следует из $AL^2 > t_a^2$. Для доказательства этого неравенства обозначим через r радиус рассматриваемой окружности. Точка L лежит внутри этой окружности. Поскольку $\angle ILA$ острый, $AL^2 > AI^2 - IL^2 > AI^2 - r^2 = t_a^2$.)

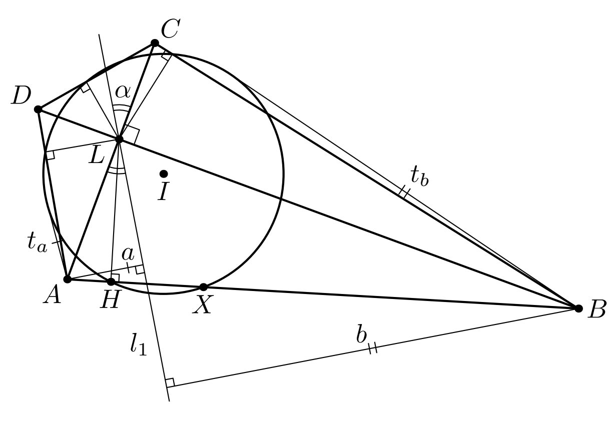

Рис. 8.

Обозначим расстояния от этой прямой до каждой из точек B, C и D через b, c, d, а длины касательных из точек B, C и D к окружности через t_b, t_c и t_d.

Докажем, что $t_b = b$.

Обозначим проекцию точки L на прямую AB через H. Обозначим вторую точку пересечения окружности и прямой AB через X. Тогда

$$\frac{t_a^2}{AL^2} + \frac{t_b^2}{BL^2} = \frac{AH \cdot AX}{AH \cdot AB} + \frac{BX \cdot BH}{BH \cdot AB} = \frac{AX + XB}{AB} = 1 =$$
$$= \sin^2 \angle(l_1, AC) + \cos^2 \angle(l_1, AC) = \frac{a^2}{AL^2} + \frac{b^2}{BL^2}\,.$$

Это равенство выполнено, поскольку

(a) LH — высота прямоугольного треугольника ALB, опущенная на гипотенузу AB, а значит $AL^2 = AH \cdot AB$ и $BL^2 = BH \cdot AB$.

(b) $AH \cdot AX = t_a^2$ и $BX \cdot BH = t_b^2$.

Поэтому $a = t_a$ влечет $b = t_b$. Аналогично, $c = t_c$ и $d = t_d$.

Поскольку для прямой l_1 выполнено $t_a = a$, $t_b = b$, $t_c = c$ и $t_d = d$, то прямая l_2, симметричная ей относительно AC тоже обладает этим же свойством. Поэтому из части «тогда» леммы 1 следует, что точки A, B, C и D лежат на двух параболах, касающихся окружности в точках пересечения прямых l_1 и l_2 с окружностью. Поэтому в параболический четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. □

Докажем лемму, на которой основано доказательство части «только тогда» леммы 1.

Лемма 2. *По параболе движется точка P. Пусть AB — хорда параболы, параллельная ее директрисе. Тогда*

(a) *точка C пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к прямым PA и PB, движется по прямой, параллельной AB.* (См. рис. 9.)

Обозначим проекцию точки P на прямую AB через H, а проекции точки H на прямые AP и BP через K и L. Точки A, B, K и L лежат на одной окружности ω, поскольку $\angle KLP = \angle KHP = \angle HAP$. Обозначим через O центр окружности ω. Тогда

(b) *окружность ω не зависит от положения точки P.* (См. рис. 10.)

(c) *окружность ω касается параболы в точках A и B.*

Для доказательства леммы 2 (a) приведем определения и сформулируем известную лемму.

Пучком $[A]$ прямых называется множество прямых, проходящих через точку A.

Соответствие между двумя пучками прямых называется *проективным*, если двойное отношение любых четырех прямых из одного пучка

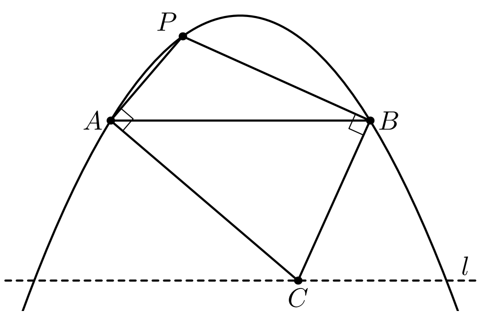

Рис. 9.

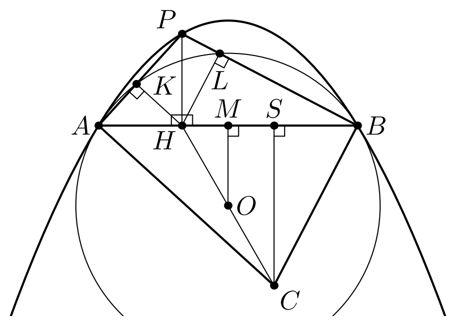

Рис. 10.

равно двойному отношению четырех соответствующих прямых из другого пучка.

Лемма Соллертинского. *Дано проективное соответствие между пучками прямых $[A]$ и $[B]$. Тогда все точки P, являющиеся пересечением соответствующих прямых из пучков $[A]$ и $[B]$, принадлежат коническому сечению, возможно, вырожденному.*

Доказательство леммы 2 (а). Рассмотрим прямую, проходящую через точку C и параллельную прямой AB. Пусть точка C' движется по этой прямой. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к прямым $C'A$ и $C'B$, через P'. Очевидно, что соответствие $AC' \to BC'$ между прямыми из пучков $[A]$ и $[B]$ является проективным. Соответствие $AC' \to AP'$ между прямыми из пучков $[A]$ является проективным, поскольку угол между любыми двумя соответствующими прямыми прямой. Аналогично, соответствие $BC' \to BP'$ между прямыми из пучков $[B]$ является проективным. Значит, соответствие $AP' \to BP'$ между прямыми из пучков $[A]$ и $[B]$ является проективным.

Поэтому из леммы Соллертинского следует, что точки P' лежат на конике или прямой. Кривая γ, по которой движется точка P', симметрична относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB. Если γ является прямой, то она является или серединным перпендикуляром к отрезку AB, или прямой, параллельной AB. Оба эти варианта невозможны. Значит, γ является коникой.

Заметим, что кривой γ принадлежит ровно одна бесконечно удаленная точка (эта точка является пересечением перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к отрезку AB). Коника, которой принадлежит ровно одна бесконечно удаленная точка, является параболой. Значит, γ является параболой, ось которой перпендикулярна прямой AB. Поскольку эта парабола проходит через точки A, B и P и ее ось параллельна оси данной параболы, эта парабола совпадает с данной. Поэтому точка C движется по прямой, параллельной AB. $\square$

Доказательство леммы 2 (b). Рассмотрим случай, когда точка P находится в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и вершина параболы (случай, когда точка P находится в другой полуплоскости относительно прямой AB, доказывается аналогично). Серединные перпендикуляры к отрезкам AK и LB являются средними линиями трапеций $AKHC$ и $BLHC$. Следовательно, они пересекаются в середине отрезка HC. Значит, середина отрезка HC совпадает с точкой O. Обозначим проекцию точки C на прямую AB через S. Из леммы 2 (a) следует, что длина отрезка CS не зависит от положения точки P на параболе. Обозначим середину отрезка AB через M. Точка O находится на серединном перпендикуляре к отрезку AB, причем $OM = 1/2CS$. Следовательно, положение точки O не зависит от выбора точки P на параболе. $\square$

Доказательство леммы 2 (c). Рассмотрим точку $P = A$. Тогда прямая AP будет касательной к параболе в точке A. Из того, что прямые AO и AP перпендикулярны и точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, следует, что точка O совпадает с центром окружности, касающейся параболы в точках A и B. Из леммы 2 (b) и вышесказанного следует, что для произвольного положения точки P на параболе, точка O является центром окружности, касающейся параболы в точках A и B. Значит, окружность ω совпадает с окружностью, касающейся параболы в точках A и B. $\square$

Доказательство части «только тогда» леммы 1. Обозначим проекцию точки P на прямую AB через H, а проекции точки H на прямые AP и BP через K и L. Поскольку треугольники HPB и HPL подобны и окружность, касающаяся параболы в точках A и B, проходит через точки K и L (это следует из пункта (c) леммы 2), то $PH = \sqrt{PL \cdot PB}$. Значит, отрезок PH равен длине касательной, проведенной из точки P к окружности, касающейся параболы в точках A и B. $\square$

Доказательство части «тогда» леммы 1. Предположим противное. Пусть точка P не лежит на параболе, касающейся окружности в точках A и B, но расстояние от точки P до прямой AB равно длине касательной, проведенной из точки P к окружности. Рассмотрим случай, когда точка P находится в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и вершина параболы. Обозначим проекцию точки P на прямую AB через H. Обозначим точку пересечения прямой PH с параболой через P'. Точки P и P' различны, поскольку точка P не лежит на параболе. Пусть PX и $P'X'$ — отрезки касательных, проведенных из точек P и P' к окружности. Тогда $PH = PX$ по условию. Из части «только тогда» леммы 1 следует, что $P'H = P'X'$. Обозначим центр и радиус окружности через I

и r. Обозначим проекцию точки I на прямую PH через H'. Тогда

$$PH^2 - P'H^2 = PX^2 - P'X'^2 = (PI^2 - r^2) - (P'I^2 - r^2) =$$
$$= PI^2 - P'I^2 = PH'^2 - P'H'^2 = (PH + HH')^2 - (P'H + HH')^2 =$$
$$= PH^2 - P'H^2 + 2HH' \cdot (PH - P'H).$$

Следовательно, $2HH' \cdot (PH - P'H) = 0$. Но $PH \neq P'H$ и $HH' \neq 0$, поскольку хорда AB не является диаметром. Противоречие. Случай, когда точка P находится в другой полуплоскости относительно прямой AB, доказывается аналогично. □

Доказательства остальных результатов.

Доказательство следствия 1. Аффинным преобразованием переведем оси парабол и диагонали параболического четырехугольника в две пары перпендикулярных прямых. Как известно, при произвольном аффинном преобразовании образ оси параболы параллелен оси образа параболы. Значит, оси образа параболического четырехугольника перпендикулярны. Поэтому из теорем 1 и 2 следует, что параболический четырехугольник при таком преобразовании переходит во вписанно-описанный. □

Доказательство следствия 2. Рассмотрим параболический четырехугольник с вершинами в точках A, B, C и D. Используя следствие 1, переведем соответствующий параболический четырехугольник во вписанно-описанный. Его осевая прямая параллельна оси параболы, являющейся образом исходной параболы. Следовательно, и осевая прямая четырехугольника $ABCD$ параллельна оси параболы. □

Доказательство следствия 3. Обозначим точки пересечения биссектрисы угла ALD с прямыми BC и AD через M и N. Тогда $BM/MC = LB/LC = AL/LD = AN/ND$. Значит, биссектрисы углов, образованных диагоналями вписанного четырехугольника являются осевыми прямыми этого четырехугольника. Поэтому из следствия 2 вытекает следствие 3.□

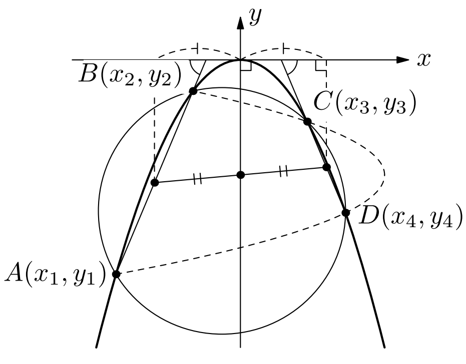

Рис. 11.

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим систему координат, в которой одна из парабол имеет уравнение $y = kx^2$ (рис. 11). Обозначим координаты точек A, B, C и D в этой системе через (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

и (x_4, y_4). Тогда $y_1 = kx_1^2$, $y_2 = kx_2^2$, $y_3 = kx_3^2$, $y_4 = kx_4^2$. Обозначим коэффициенты k прямых AB и CD через k_1 и k_2. По следствию 3 $k_1 = -k_2$. Поэтому $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k(x_1 + x_2) = \frac{-(y_3 - y_4)}{x_3 - x_4} = -k(x_3 + x_4)$. Заметим, что $\frac{k(x_1 + x_2)}{2}$ и $\frac{-k(x_3 + x_4)}{2}$ являются абциссами середин отрезков AB и CD в заданной системе координат. Отсюда следует, что ось выбранной параболы проходит через середину отрезка, соединяющего середины отрезков AB и CD. Поэтому она проходит через центр тяжести четырехугольника $ABCD$. То же самое можно сказать и про ось другой параболы. Значит, оси парабол пересекаются в центре тяжести четырехугольника $ABCD$. □

Доказательство теоремы 3. Докажем эту теорему для $N = 3$. Из доказательства будет видно, что общий случай доказывается аналогично.

Следующая лемма очевидна.

Лемма. *Через точку внутри окружности проведены две хорды. Тогда парабола, касающиеся окружности в концах первой хорды, и парабола, касающаяся окружности в концах второй хорды, пересекаются в четырех точках.*

Из леммы 1 и этой леммы следует, что главные диагонали шестиугольника являются биссектрисами углов, на которые хорды делят плоскость. Поэтому хорды и главные диагонали делят плоскость на 12 равных углов (рис. 12). Рассмотрим две главные диагонали шестиугольника, концы которых принадлежат одной параболе. Тогда хорда, принадлежащая этой параболе, является биссектрисой угла, образованного этими диагоналями. Из этого и следствия 3 следует, что концы этих главных диагоналей, являющиеся вершинами шестиугольника, лежат на окружности. Мы доказали, что концы любых двух главных диагоналей шестиугольника лежат на одной окружности. Поэтому все вершины шестиугольника лежат на одной окружности. □

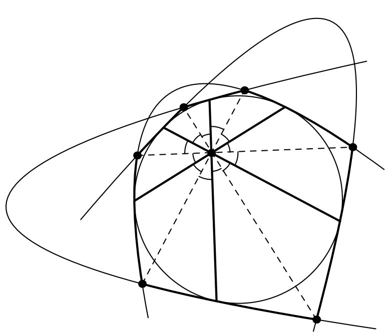

Рис. 12.

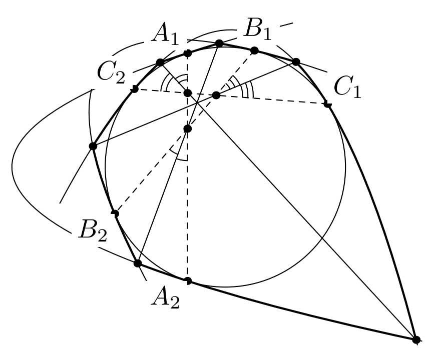

Рис. 13.

Доказательство утверждения 2. (См. рис. 13.)

Обозначим точки касания окружности с одной параболой через A_1 и A_2, со второй — через B_1 и B_2, с третьей — через C_1 и C_2. Из леммы 1 следует, что главные диагонали описанного параболического шестиугольника являются биссектрисами треугольника, образованного прямыми A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. Значит, они пересекаются в одной точке. $\square$

Покажем, как можно построить с помощью циркуля и линейки бесконечно много точек параболического четырехугольника с вершинами в четырех данных точках. Известно, что через четыре точки можно провести только две параболы. Приведем план этого построения. Обозначим через A, B, C и D четыре данные точки. Построим две осевые прямые четырехугольника $ABCD$. Они будут параллельны осям парабол, образующих параболический четырехугольник. Обозначим эти параболы через p_1 и p_2. Проведем окружность через точки A, B и C. Из следствия 3 следует, что если эта окружность и парабола p_1 (или p_2) пересекаются в четырех точках, то прямые, соединяющие эти точки, образуют равные углы с осевыми прямыми четырехугольника $ABCD$, следовательно, можно построить четвертую точку пересечения окружности с параболой p_1 (или p_2). Таким образом, построены пять точек параболы p_1 (или p_2). Значит, можно построить бесконечно много точек, принадлежащих параболическому четырехугольнику.

Благодарности

Автор благодарит А. А. Заславского за конструктивное обсуждение работы и за предложенную им идею доказательства части «тогда» теоремы 1 и А. Б. Скопенкова за ценные замечания при подготовке текста.

Список литературы

[1] А.В. Акопян, А.А. Заславский. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. М.: МЦНМО, 2007.

[2] С. В. Маркелов. *Парабола как окружность* // Десятая летняя конференция Турнира городов. М.: МЦНМО, 1999. С. 36–42, 112–123.

[3] А. А. Заславский. *Геометрические преобразования*. М.: МЦНМО, 2003.

Ф. К. Нилов, лицей «Вторая школа», г. Москва