Студенческая олимпиада по математике

Р. Авдеев А. Москвин

В декабре 2005 года на механико-математическом факультете МГУ была проведена олимпиада по математике для студентов 1–2 курсов. На решение шести предложенных задач участникам давалось пять часов. Для успешного выполнения всех заданий олимпиады было достаточно владения материалом первого семестра.

До 1989 г. общефакультетские олимпиады проводились регулярно, а в 2004 г. эта традиция возобновилась по инициативе студентов. Умение решать нестандартные задачи очень важно для начинающих математиков. Для развития этого умения одних только лекций и семинаров может быть недостаточно. Олимпиады помогают восполнить этот недостаток.

Организация и проведение олимпиады являлись результатом коллективного труда преподавателей и студентов старших курсов факультета. Тематика олимпиады охватила различные разделы математики: в составлении задач, а затем и в проверке работ принимали участие представители различных кафедр.

Отметим лучшие результаты среди участников. По 5 задач решили первокурсник Александр Ефимов, второкурсники Алексей Лазарев и Кирилл Попков. По 4 задачи — первокурсники Василий Астахов, Алексей Головко, Александр Перепечко, Андрей Трепалин и второкурсник Дмитрий Пермяков.

Задачи олимпиады

1. Доказать, что угол между концентрическими равносторонними гиперболами равен удвоенному углу между их асимптотами. (*А. Акопян*)

2. Доказать, что не существует многочлена $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, для которого решением системы

$$\begin{cases} x_1x_2 = x_3x_4, \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases}$$

является в точности множество $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 = 0, x_3 = 0\}$. (*Р. Авдеев*)

3. Рассмотрим множество Γ графов без петель и кратных ребер, включая пустой граф. Пусть $G \in \Gamma$ — граф, а x — его произвольная вершина. Обозначим через G_x подграф, получающийся из G выбрасыванием вершины x, а через $\overline{G}_x$ — подграф, получающийся из G выбрасыванием вершины x и всех вершин, с которыми вершина x не соединена ребром (вершины выбрасываются вместе со всеми выходящими из них ребрами).

Доказать, что существует (хотя бы одна) функция $f\colon \Gamma \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1) $f(\varnothing) = 1$ ($\varnothing$ — пустой граф);

2) $f(\cdot) = 0$ ($\cdot$ — граф с одной вершиной);

3) $f(G) = f(G_x) - f(\overline{G}_x)$, где G — произвольный граф с $n \geqslant 2$ вершинами, а x — произвольная вершина графа G (граф $\overline{G}_x$ может быть пустым). (*Р. Авдеев*)

4. Выяснить, существует ли функция $f(x) \in C^1(-\varepsilon, \varepsilon)$ со следующими свойствами:

a) $f(0) = 0$;

b) $f'(x) \neq 0$ при $x \neq 0$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \infty$. (*И. Х. Сабитов*)

5. Две плоскости в пространстве пересекаются под углом $\dfrac{3\pi}{4}$. Пусть O — одна из точек пересечения. Отрезок OA равномерно вращается в первой плоскости относительно точки O. Найти все углы $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, для которых существует такое непрерывное (но не обязательно равномерное) вращение отрезка OC во второй плоскости относительно точки O, что в любой момент времени $\angle AOC = \alpha$. (*А. Т. Фоменко*)

6. а) Доказать, что для любого множества A, состоящего из n различных действительных чисел, найдется такое число u, что количество чисел, представимых в виде $a_1 + ua_2$, $a_1, a_2 \in A$, больше $n^2 - n$, но строго меньше n^2.

б) Доказать, что количество чисел вида $a_1(a_3 - a_4) + a_2(a_5 - a_6)$, $a_1, \ldots, a_6 \in A$, больше $n^2 - n$. (*С. В. Конягин*)

Решения задач

1. Введем на плоскости систему координат, в которой уравнение первой из гипербол запишется в виде

$$xy = 1.$$

Тогда вторая гипербола получается из первой линейным преобразованием, переводящим асимптоты в асимптоты, т. е.

$$\begin{cases} \tilde{x} = \lambda(x\cos\varphi + y\sin\varphi), \\ \tilde{y} = \lambda(-x\sin\varphi + y\cos\varphi), \end{cases}$$

где $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ — угол между осями гипербол (он же — один из углов между асимптотами). В новой системе координат уравнение второй гиперболы имеет вид $\tilde{x}\tilde{y} = 1$, а в старой —

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) = \lambda^{-2}.$$

Направляющий вектор касательной к кривой второго порядка $\{F(x,y) = 0\}$ в точке (x_0, y_0) имеет вид $(-F'_y(x_0,y_0), F'_x(x_0,y_0))$. Пусть (x_0, y_0) — точка пересечения наших гипербол. Тогда направляющий вектор касательной к первой гиперболе в этой точке — это $\vec{\xi} = (-x_0, y_0)$, ко второй — $\vec{\eta} = (-x_0\cos 2\varphi - y_0\sin 2\varphi, -x_0\sin 2\varphi + y_0\cos 2\varphi)$. Имеем

$$\cos(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{(\vec{\xi}, \vec{\eta})}{|\vec{\xi}| \cdot |\vec{\eta}|} = \cos 2\varphi,$$

откуда и следует утверждение задачи.

2. Пусть такой многочлен $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ существует. Покажем, что тогда во множестве $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_2 = 0, x_4 = 0\}$ лежит кроме начала координат еще по крайней мере одна точка, удовлетворяющая системе.

Действительно, каждая точка множества A удовлетворяет первому уравнению системы. Пусть $g(x_1, x_3) = f(x_1, 0, x_3, 0)$. Осталось показать, что у этого многочлена в $\mathbb{C}(x_1, x_3)$ имеется не меньше двух нулей. По условию, один нуль — это начало координат $(0,0)$. Поэтому свободный член этого многочлена равен нулю. Если $g(x_1, x_3) \equiv 0$, то в качестве нуля можно взять любую точку, отличную от начала координат. Пусть $g(x_1, x_3) \not\equiv 0$. Запишем многочлен $g(x_1, x_3)$ в виде

$$g(x_1, x_3) = h_n(x_3)x_1^n + \ldots + h_1(x_3)x_1 + h_0(x_3),$$

где $h_k(x_3)$ — многочлены, зависящие только от x_3, причем $h_n(x_3)$ — ненулевой многочлен, стоящий при наибольшей степени по x_1 многочлена $g(x_1, x_3)$.

Если эта наибольшая степень отлична от нуля, то существует такое значение $x_3 = c \neq 0$, что $h_n(c) \neq 0$. Значит, многочлен $g(x_1, c)$ не является константой и имеет хотя бы один корень $x_1 = d$. Получаем $g(d, c) = 0$.

Теперь пусть $g(x_1, x_3) = h_0(x_3)$. Многочлен $h_0(x_3)$ имеет нулевой свободный член, и поэтому $x_3 = 0$ — его корень. Значит, можно положить $x_1 = 1$ и получить $g(1, 0) = 0$.

3. Единственная функция, удовлетворяющая условиям задачи, имеет вид
$$f(G)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kH_k,$$
где n — количество вершин графа G, H_k — количество полных подграфов графа G, содержащих k вершин. В частности, $H_0=1$, $H_1=n$. Полный граф — граф, у которого любая пара вершин соединена ребром. Полный подграф определяется множеством своих вершин (порядок вершин неважен). Осталось показать, что предъявленная функция действительно удовлетворяет рекуррентному соотношению. Это можно сделать, подсчитав числа H_k графа G через эти же числа графов G_x и $\overline{G}_x$:
$$H_k(G)=H_k(G_x)+H_{k-1}(\overline{G}_x),$$
откуда
$$f(G)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kH_k(G)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(H_k(G_x)+H_{k-1}(\overline{G}_x))=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kH_k(G_x)-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kH_k(\overline{G}_x)=f(G_x)-f(\overline{G}_x).$$

4. Из условия следует, что $f'(0)=0$. Без ограничения общности считаем, что $f'(x)>0$ при $x>0$. Тогда функция $f(x)$ монотонно возрастает на $(0,\varepsilon)$. Из определения предела получаем, что существует $\delta>0$, такое что для любого $x\in(0,\delta)$ выполнено неравенство $f(x)>f'(x)$. Можно считать $\delta<1$. Возьмем произвольную точку $y\in(0,\delta)$. По теореме Лагранжа существует точка $\xi\in(0,y)$, для которой $f(y)=f'(\xi)y$. Но $f'(\xi)<f(\xi)<f(y)$, откуда $f(y)<f(\xi)y<f(y)y$. Так как $f(y)>0$, то получаем $y>1$. Противоречие. Значит, требуемой функции не существует.

Ответ: не существует.

5. Реализуем наши плоскости в пространстве следующим образом: $\Pi_1=\{y=z\}$, $\Pi_2=\{z=0\}$. Единичный вектор $\overline{OA}$, гладко вращающийся в первой плоскости, зададим как $(\sin\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi)$, а единичный вектор $\overline{OC}$ во второй плоскости — $(\sin\psi,\cos\psi,0)$. Тогда условие на угол α между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ запишется в виде $\cos(\overline{OA},\overline{OC})=$ $=\sin\varphi\sin\psi+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\cos\psi=\cos\alpha$, или
$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sin^2\varphi}{2}}}\sin\psi+\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}\cos\psi=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sin^2\varphi}{2}}}.$$

Введем обозначение: $f(\varphi) = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sin^2\varphi}{2}}}$. Несложно показать, что существует такая гладкая строго возрастающая функция $\theta(\varphi)$, для которой выполнены условия

$$\sin\theta(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sin^2\varphi}{2}}},\ \cos\theta(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}},$$

причем $\theta(\varphi+2\pi) = \theta(\varphi)+2\pi$. Поэтому имеет смысл равенство:

$$\cos(\psi - \theta(\varphi)) = f(\varphi). \tag{1}$$

Мы хотим построить непрерывную функцию $\psi = \psi(\varphi)$ такую, что выполнено равенство (1), а также условие $\psi(\varphi+2\pi) = \psi(\varphi)+2\pi$. Ограничение на α следующее: $|f(\varphi)| \leqslant 1$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$. Отсюда $\cos\alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, а этого уже достаточно для построения функции $\psi = \psi(\varphi)$:

$$\psi(\varphi) = \theta(\varphi) + \arccos(f(\varphi)).$$

Ответ: $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4}]$.

6. а) Пусть $A = \{b_1 < b_2 < \dots < b_n\}$. Выберем m, для которого $b_m - b_{m-1}$ минимально. Тогда условию задачи удовлетворяет $u = (b_n - b_1)/(b_m - b_{m-1})$. Действительно, для двух различных наборов индексов i, j и k, l, где можно считать $i > k$, равенство $b_i + ub_j = b_k + ub_l$ равносильно соотношению $(b_i - b_k)(b_m - b_{m-1}) = (b_n - b_1)(b_l - b_j)$. Из него с необходимостью вытекает $i = n, k = 1$. Значит, должно выполняться равенство $b_m - b_{m-1} = b_l - b_j$. В силу условия минимальности разности $b_m - b_{m-1}$ этому равенству удовлетворяют не более $n-1$ пар l, j. В то же время одна такая пара имеется: $l = m, j = m-1$. Отсюда получаем, что для выбранного u различных чисел вида $a_1 + ua_2$, где $a_1, a_2 \in A$, имеется не меньше $n^2 - n + 1$ и не больше $n^2 - 1$.

б) Пусть снова $A = \{b_1 < b_2 < \dots < b_n\}$. Выберем m, для которого $b_m - b_{m-1}$ минимально. Положим $u = (b_n - b_1)/(b_m - b_{m-1})$. Тогда из пункта а) следует, что различных чисел вида $b_k + ub_l$ больше, чем $n^2 - n$. Значит, чисел вида $(b_m - b_{m-1})(b_k + ub_l) = b_k(b_m - b_{m-1}) + b_l(b_n - b_1)$ больше $n^2 - n$. А это и требовалось доказать.

Р. Авдеев: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
e-mail: `suselr@yandex.ru`

А. Москвин: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
e-mail: `moskvin-ay@mail.ru`