Конкурсы и олимпиады

Студенческие олимпиады и межкафедральный семинар на мехмате Московского государственного университета*

В. И. Богачев А. М. Райгородский А. Б. Скопенков†
Н. А. Толмачев

Великий ученый А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика. В этой заметке рассказывается об опыте поддержания престижа умения решать трудные задачи, а также универсальности математического образования, при помощи *студенческих математических олимпиад* и *межкафедрального семинара имени А. Н. Колмогорова* на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Приводятся задачи олимпиад и семинара.

Студенческие олимпиады

Примерно с 2001 года на мехмате МГУ возобновлена замечательная традиция проведения студенческих олимпиад. Отдельные кафедры проводят олимпиады и заочные конкурсы по теории вероятностей[1)], геометрии

*Полный обновляемый вариант этой информационной заметки находится по адресу: http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/stolymp.pdf

†частично поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Гранты номер 05-01-00993, 07-01-00648a и 06-01-72551-NCNILa, Грантами Президента РФ НШ-4578.2006.1 и МД-4729.2007.1, а также стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года.

[1)]См. http://mech.math.msu.su/probab/olimpia/olimpia.htm и топологии[2)], алгебре[3)], анализу, механике, дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными.

Большинство этих соревнований проводятся для студентов 1–2 курса и помогают студенту выбрать кафедру. Проводятся также общематематические олимпиады — олимпиада, посвященная Пифагору (2004 и 2005, [1]), и Заключительный тур всемехматовской олимпиады (с 2006; председатель жюри зав. отделением математики акад. РАН А. Т. Фоменко, зам. председателя жюри проф. В. И. Богачев). Важно, что при правильной организации студенческих олимпиад участие в них лишь помогает студенту начать научную работу [18, 21]. Задачи Заключительных туров выкладываются в интернете[4)] и приводятся ниже (после условия задачи в скобках указывается фамилия предложившего, который не обязательно является автором задачи; некоторые фамилии утрачены).

Команда мехмата МГУ участвует в международной студенческой математической олимпиаде IMC[5)] в тех случаях, когда это участие оплачивается спонсорами. Победители международных студенческих олимпиад регулярно получают приглашения учиться в престижнейших университетах мира, но, как правило, отказываются от них в пользу продолжения обучения в Московском Государственном Университете.

Задачи заключительных туров — плод коллективного труда сотрудников мехмата МГУ (окончательные варианты задач готовятся В. И. Богачевым); работы проверяют авторы этой заметки и М. Б. Скопенков. Мы надеемся, что со временем состав жюри будет расширяться. Мы приглашаем всех математиков передавать В. И. Богачеву задачи для заключительного тура (не по электронной почте!).

Правила приглашения на Заключительный тур и последующего формирования команды мехмата МГУ на международную олимпиаду основаны на объективных критериях и известны всем заинтересованным лицам (см., например, полный вариант этой заметки в интернете). Здесь мы приведем лишь составы команд:

(2001) Лившиц Е., Никокошев И., Поярков А., Скопенков М. и Черепанов Е.

(2006) Ефимов А. (гран-при), Калинин М. (1 премия), Козлов П. (1 премия) и Смирнов С. (3 премия) (Астахов В. прошел в команду, но не смог участвовать в олимпиаде).

(2007) Астахов В. (1 премия), Баранов Д. (1 премия), Ефимов А. (гран-при), Перепечко А. (1 премия) и Смирнов С. (1 премия) (Прасолов М.

[2)] См. `http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/geomolym.pdf` и [9]

[3)] См. `http://www.math.msu.su/department/algebra/olymp-06.html`

[4)] См. `http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/stolymp.pdf`

[5)] См. `http://www.imc-math.org`

и Абрамов Я. прошли в команду, но не участвовали в олимпиаде ввиду отсутствия загранпаспортов).

В 2006 и 2007 команды занимали II место в неофициальном командном зачете.

Мы благодарим М. Скопенкова за полезные замечания, а также Д. Вельтищева и М. Вельтищева за предоставление компьютерных версий рисунков.

Межкафедральный семинар

Традиция необязательных (про)семинаров для младшекурсников, направленных на изучение математики посредством решения задач и не являющихся узкоспециализированными, восходит к А. С. Кронроду (1950-е) и Е. М. Ландису (1970-е). Межкафедральный семинар имени А. Н. Колмогорова проводится с 2006 года. На нем решаются и разбираются интересные задачи из *разных* областей математики (этим наш семинар отличается от других). По формулировкам большинство их доступно даже первокурсникам (знающим текущий лекционный материал), но решения многих из них сложны. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения и обсуждения участники познакомятся с важными математическими понятиями и теориями. По каждой теме решаются и разбираются как простые ключевые задачи, так и более трудные задачи (в том числе олимпиадные и нерешенные).

Занятия семинара объединяются в циклы из 1–2 занятий, связанных общей темой или идеей. Разные циклы относятся к разным областям математики; эти циклы почти независимы друг от друга (поэтому можно изучать только те циклы, которые студенту наиболее интересны). Тем более занятия каждого семестра не зависят от занятий прошлого семестра! Например, майские занятия посвящены подготовке команды мехмата МГУ к международной олимпиаде. Большинство материалов доступно в интернете[6)], некоторые приводятся в этой заметке.

Некоторые занятия проводятся замечательными математиками, не являющимися соруководителями семинара (весна 2006 — А. А. Черный, осень 2006 — А. А. Клячко-мл. и В. Ю. Протасов, весна 2007 — А. Я. Белов-Канель и Э. Б. Винберг). Мы приглашаем всех математиков присылать руководителям предложения о проведении занятий семинара.

Активная работа в семинаре поможет студентам успешно участвовать в студенческих олимпиадах, развить математический кругозор (за счет знакомства с *идеями* из разных областей математики без долговременного

[6)] См. `http://dfgm.math.msu.su/materials.php` изучения их *языка*), сделать первые математические открытия и, возможно, грамотно выбрать научное направление и руководителя.

Семинар назван именем великого математика А. Н. Колмогорова, который начал свой путь в науку в 19 лет с решения трудной проблемы о рядах Фурье, а в дальнейшем внес выдающийся вклад в разные области математики, тесно связанные с приложениями: теорию вероятностей, теорию динамических систем, гидродинамику и теорию сложности.

Задачи заключительных туров всемехматовских олимпиад

2001-1. Докажите, что для любых чисел a и b если $a > b > 0$, то $a^{b^a} > b^{a^b}$. (*П. Бородин*)

2001-2. Формулировка этой задачи утрачена.

2001-3, 2006-4. Пусть $k_1, \dots, k_n$ — натуральные числа (не обязательно различные). Доказать, что сумма абсолютных величин коэффициентов многочлена $\prod_{j=1}^n (1 - z^{k_j})$ не меньше $2n$. (*С. Конягин*)

2001-4. Доказать, что для любой непрерывной на $[0, 1]$ действительной функции f найдется такое число a, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{|f(x) - a|} = \infty$. (*С. Конягин*)

2001-5. Существует ли такая постоянная C, что для любой непрерывно дифференцируемой на прямой действительной функции f, имеющей вторую производную, определенную всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, условия $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $|f(x) f''(x)| \leqslant 1$ во всех точках существования $f''(x)$ влекут неравенство $|f'(x)| \leqslant C$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$?

2001-6. Пусть G — группа нечетного порядка, не превосходящего 2001. Доказать, что существует такое множество $S \subset G$, содержащее не более 20 элементов, что каждый элемент G есть произведение нескольких различных элементов множества S.

2006-1. Пусть f — неотрицательная непрерывная функция на $[0, +\infty)$, причем $\int_0^T f(x)\, dx \leqslant T$ для всех $T \geqslant 0$. Докажите, что функция $\frac{f(x)}{1 + x^2}$ имеет конечный интеграл по $[0, +\infty)$. (*Фольклор*)

2006-2. Существуют ли два таких коммутирующих линейных оператора в $\mathbb{R}^3$, что нет базиса, в котором матрицы обоих операторов имеют жорданову форму? (*А. Ошемков и А. Скопенков*)

2006-3. См. теорему Петерсена-Морли [13, §3].

2006-5. Дан набор 11-мерных векторов, у каждого из которых 5 нулевых и 6 единичных координат. Диаметр набора (т. е. максимум попарных расстояний между его точками) равен $\sqrt{8}$.

(а) Какова максимальная возможная мощность такого набора?

(б) Докажите, что данный набор можно разбить на не более чем 18 частей меньшего диаметра. (*А. Райгородский*)

2006-6. Дана бесконечно дифференцируемая функция f на $\mathbb{R}^2$. Пусть U — такой открытый круг, что

$$\int\!\!\int_U \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^3}\,dx\,dy<\infty, \quad \text{где } \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^3}:=0 \text{ при } x=y.$$

Докажите, что функция f постоянна на U. (*В. Богачев*)

2007-1. Пусть P — многочлен степени d на прямой со старшим коэффициентом 1. Докажите, что длина множества $\{t\colon\ |P(t)|\leqslant c\}$ не превосходит $2dc^{1/d}$. (*В. Богачев*)

2007-2. (i) В конечном множестве выбрано конечное число подмножеств, пересечение любых двух из которых содержит не менее двух элементов. Докажите, что элементы данного множества можно так раскрасить в два цвета, чтобы никакое выбранное подмножество не было бы одноцветным.

(ii) То же с заменой условия «пересечение любых двух из которых содержит не менее двух элементов» на «пересечение никаких двух из которых не может содержать ровно один элемент». (*А. Райгородский*)

2007-3. Докажите, что для всякой вещественной матрицы $A=(a_{ij})$ порядка n выполнено неравенство

$$|\det(I+A)|\leqslant \exp\Bigl(\operatorname{trace} A+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\Bigr).$$

(*неравенство Карлемана*)

2007-4. Дана последовательность вещественных чисел a_n. Известно, что для всякого $\lambda\in(1,2)$ последовательность чисел $a_{[\lambda^n]}$, имеет конечный предел. (Здесь $[r]$ — целая часть числа r.) Обязана ли сходиться сама последовательность $\{a_n\}$? (*А. Черный*)

2007-5. Существует ли в трехмерном пространстве многогранник (не обязательно выпуклый), все грани которого — шестиугольники? Определение многогранника и его грани см. в [5, с. 4. строка 2 снизу].

(*М. Скопенков*)

Указания и решения к некоторым задачам всемехматовских олимпиад

Авторы благодарны А. Москвину, Р. Авдееву и С. Конягину за предоставление своих решений задач 1, 2 и 4 2006 года, соответственно.

2006-1. Введем функцию $g(T) := \int_0^T f(t)dt$. Тогда из условия следует, что $0 \leqslant g(t) \leqslant t$ для любого $t > 0$. Для $M > 0$

$$\int_0^M \frac{f(t)dt}{1+t^2} = \int_0^M \frac{g'(t)dt}{1+t^2} = \int_0^M \frac{dg(t)}{1+t^2} = \frac{g(t)}{1+t^2}\Big|_0^M + \int_0^M \frac{2tg(t)dt}{(1+t^2)^2}.$$

Оценим этот интеграл. Первое слагаемое в последнем выражении стремится к нулю при $M \to \infty$. Подынтегральная функция второго слагаемого положительна и ограничена интегрируемой на $[0, +\infty)$ функцией: $0 \leqslant \dfrac{2tg(t)dt}{(1+t^2)^2} \leqslant \dfrac{2t^2}{(1+t^2)^2}$. Значит, второе слагаемое имеет предел при $M \to \infty$. Отсюда следует утверждение задачи.

2006-2. Ответ: да.

Рассмотрим два линейных оператора, заданных в стандартном базисе следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что эти два оператора коммутируют.

Предположим, что существует общий базис (e_1, e_2, e_3), в котором обе матрицы приводятся к жордановой форме. У матрицы B два собственных значения 1 и 2, которым соответствуют собственные вектора $e_1 = (\mu, 0, 0)^T$ и $e_3 = (2\nu, 0, \nu)^T$. Поскольку в жордановой форме матрицы B присутствует жорданова клетка размера 2×2 с собственным значением 1 и e_1 — единственный (с точностью до пропорциональности) собственный вектор матрицы B с собственным значением 1, то можно выбрать вектор $e_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$, для которого $(B - E)e_2 = e_1$. Из этого равенства получаем $e_2 = (\alpha, -\mu, \mu)^T$.

Заметим, что e_1 и e_3 — собственные векторы оператора A, отвечающие собственному значению 1. В жордановой форме матрицы A тоже присутствует клетка размера 2×2 с собственным значением 1. Поэтому вектор $(A - E)e_2 = (-\mu, 0, 0)^T$ равен либо e_1, либо e_3. Это не так (поскольку $\mu \neq 0$). Получили противоречие.

2001-3, 2006-4. Обозначим рассматриваемый многочлен через $f(z)$. Так как $f(1) = 0$, то $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{r} z^{m_j} - \sum\limits_{j=1}^{r} z^{l_j}$, где никакое слагаемое из первой суммы не совпадает ни с каким слагаемым из второй. Поэтому искомая сумма модулей коэффициентов равна $2r$. Далее, $f'(1) = \ldots = f^{(n-1)}(1) = 0$. Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{r} m_j^p = \sum\limits_{j=1}^{r} l_j^p$, $p = 1, \ldots, n-1$. Значит, имеем соответствующие равенства для элементарных симметрических многочленов: $\sigma_i(m_1, \ldots, m_r) = \sigma_i(l_1, \ldots, l_r)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Если бы $r \leqslant n-1$, то наборы $(m_1, \ldots, m_r)$ и $(l_1, \ldots, l_r)$ совпадали бы с точностью до перестановки, и тогда $f(z) \equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что $r \geqslant n$.

2006-5-а. Ответ: C_{10}^4.

11-мерный вектор, состоящие из 5 нулевых и 6 единичных координат, можно интерпретировать как 5-элементное подмножество 11-элементного множества. Каждому такому вектору можно сопоставить набор из номеров тех мест, на которых стоят нули. При этом набору из 11-мерных векторов, диаметр которого равен $\sqrt{8}$, соответствует набор 5-элементных подмножеств 11-элементного множества, каждые два из которых пересекаются. Теперь вопрос можно переформулировать следующим образом:

> *каково максимально возможное число* 5*-элементных подмножеств* 11*-элементного множества, любые два из которых пересекаются*?

Примером из C_{10}^4 таких подмножеств является набор 5-элементных множеств, содержащих элемент 11 множества $\mathbb{Z}_{11} := \{1, 2, \ldots, 10, 11\}$.

Определим 5-элементные подмножества

$$A_s(\sigma) := \{\sigma(s), \sigma(s+1), \sigma(s+2), \sigma(s+3), \sigma(s+4)\}, \quad \text{где } \sigma \in S_{11} \text{ и } s \in \mathbb{Z}_{11}.$$

Подмножество $A_s(\sigma)$ не пересекается ни с $A_{s+5}(\sigma)$, ни с $A_{s+6}(\sigma)$. Поэтому произвольный набор 5-элементных подмножеств 11-элементного множества $\mathbb{Z}_{11}$, любые два из которых пересекаются, содержит не более пяти подмножеств из $A_1(\sigma), A_2(\sigma), \ldots, A_{11}(\sigma)$. Всего 5-элементных подмножеств C_{11}^5. Значит, число 5-элементных подмножеств в нашем наборе не превосходит $\frac{5}{11} C_{11}^5 = C_{10}^4$.

2006-5-б. Разобьем множество всех 11-мерных векторов из нулей и единиц на 16 подмножеств следующим образом. Каждое подмножество определяется первыми четырьмя числами в первых четырех разрядах. Очевидно, что таких подмножеств ровно 16. Нетрудно проверить, что расстояние между любыми двумя векторами из пересечения одного подмножества с данным набором не превосходит $\sqrt{7} < \sqrt{8}$.

2006-6. Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции f разность $f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)$ есть $O(|x-y|^2)$. Так как функция $|x-y|^{-1}$ интегрируема на $U \times U$ ввиду интегрируемости функции $|x|^{-1}$

на U (последнее легко проверить в полярных координатах), получаем интегрируемость $|x-y|^{-3}f'(x)(y-x)$ на $U \times U$. По теореме Фубини при почти каждом $x \in U$ функция $y \mapsto |x-y|^{-3}f'(x)(y-x)$ интегрируема на U. Заметим, что это возможно лишь при $f'(x) = 0$. Для этого достаточно проверить, что для ненулевого вектора v функция $z \mapsto |z|^{-3}(v, z)$ не интегрируема в окрестности нуля. Действительно, поворотом системы координат приходим к случаю, когда $v = ce_1$, $e_1 = (1, 0)$. В полярных координатах интеграл модуля указанной функции есть интеграл от $cr^{-1}|\cos\theta|$ по $(0, r_0) \times [0, 2\pi]$, т. е. бесконечен. Итак, $f'(x) = 0$ при почти всех $x \in U$, откуда $f'(x) = 0$ в U, т. е. f — постоянная.

Комментарий к задаче 2006-6. Доказанное легко обобщить на случай, когда от f требуется лишь измеримость (этот случай значительно более сложным способом был рассмотрен в [3]). Такой более общий случай сводится к случаю гладкой функции f с помощью сверток $f_\delta(x) = \int_U f(x+\delta u)\varrho(u)\,du$, $\quad x \in (1-\delta)U$, $\delta \in (0,1)$, где ϱ — неотрицательная гладкая функция с носителем в U и интегралом 1. Остается заметить, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\delta < \varepsilon$ интегралы от $|x-y|^{-3}|f_\delta(x) - f_\delta(y)|$ по $(1-\varepsilon)U \times (1-\varepsilon)U$ конечны (тогда функции f_δ постоянны в $(1-\varepsilon)U$, значит, их предел f равен почти всюду некоторой постоянной). Это ясно из оценки

$$\int\!\!\int_{(1-\varepsilon)U} \frac{|f_\delta(x) - f_\delta(y)|}{|x-y|^3}\,dx\,dy \leqslant \int\!\!\int_U \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^3}\,dx\,dy,$$

получаемой непосредственно из определения f_δ с учетом того, что $x + \delta u, y + \delta u \in U$ при $x, y \in (1-\varepsilon)U$, $u \in U$, $\delta < \varepsilon$.

2007-5. Ответ: существует.

Основная идея состоит в том, чтобы искать требуемый многогранник среди невыпуклых (и даже не гомеоморфных шару) многогранников. Вот набросок только одной из возможных конструкций «торообразного» многогранника, удовлетворяющего условию. Возьмем многогранник в форме «рамки», то есть объединения четырех усеченных четырехугольных пирамид, с подходящим образом склеенными боковыми гранями. Он имеет 16 четырехугольных граней. Чтобы получить искомый многогранник, нужно теперь выбрать подходящим образом 8 попарно несмежных ребер и «срезать» их малые окрестности (а для тех ребер, двугранные углы при которых больше π, нужно, наоборот, «нарастить» многогранник). Получим 8 новых шестиугольных граней и из каждой четырехугольной грани получим шестиугольную, то есть у построенного многогранника все грани будут шестиугольниками.

Замечание. Очевидный подсчет эйлеровой характеристики показывает, что не существует *выпуклого* многогранника с требуемым свойством.

Проблема Борсука. Универсальные покрышки (А.М. Райгородский)

Проблема Борсука. *Требуется найти минимальное число $f(n)$ частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество диаметра* 1 *в* $\mathbb{R}^n$. *Иными словами,*

$$f(n) = \max_{\Omega} \min\{f \ : \ \Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_f, \ \operatorname{diam} \Omega_i < \operatorname{diam} \Omega \text{ для любого } i\},$$

где $\operatorname{diam} \Omega = \sup\limits_{x,y \in \Omega} |x - y|$.

Гипотеза Борсука. $f(n) = n + 1$ [2, 7, 10–12, 19, 20].

1. (a) Докажите, что каждое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ диаметра 1 покрывается правильным шестиугольником с расстоянием 1 между параллельными сторонами.

(b) Разбейте шестиугольник из (a) на три части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выведите отсюда справедливость гипотезы Борсука на плоскости.

(c) (неулучшаемость результата (b)). Приведите на плоскости пример такой фигуры диаметра 1, которую нельзя разбить на три части диаметра $< \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Разбейте трехмерный шар на четыре части диаметра

(a) < 1, (b) $= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}$.

3. Разбейте n-мерный шар на $n + 1$ часть диаметра

(a) < 1, (b) как можно меньшего диаметра.

4. (a) Докажите теорему Юнга: *всякое множество* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *диаметра* 1 *покрывается шаром радиуса* $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$ [4].

(b) Выведите из теоремы Юнга, что $f(n) \leqslant 2^n$.

5*. Теорема Борсука – Люстерника – Шнирельмана. Докажите, что

(a) трехмерный шар нельзя разбить на три части меньшего диаметра [2].

(b) n-мерный шар нельзя разбить на n частей меньшего диаметра [8].

Для изучения функции $f(n)$ уже оказалось полезным следующее понятие.

Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *универсальной покрышкой*, если для любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ диаметра 1 существует такое движение φ, что $\Omega \subset \varphi(U)$.

Задача 1a означает, что в качестве универсальной покрышки в $\mathbb{R}^2$ можно взять правильный шестиугольник с расстоянием 1 между параллельными сторонами.

6. (a) Докажите, что универсальной покрышкой (в $\mathbb{R}^n$) является множество $B_1 \cap B_2 \subset \mathbb{R}^n$, где B_1 — шар радиуса $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$ и B_2 — шар радиуса 1 с центром на границе шара B_1.

(b) Выведите из (a), что $f(n) \leqslant 2^{n-1}+1$.

(c)* Можно ли в какой-нибудь размерности уточнить результат (b)?

(d)* Докажите, что множество $B_1 \cap B_2$ нельзя разбить на 4 части меньшего диаметра.

7. (a) Докажите, что правильный октаэдр является универсальной покрышкой в размерности 3, если расстояние между его параллельными гранями равно 1 (т. е. если октаэдр задается уравнением $|x|+|y|+|z| \leqslant \sqrt{3}/2$).

(b) Отсечем от октаэдра из (a) в трех взаимно перпендикулярных направлениях три пирамиды; отсечения производятся посредством плоскостей, параллельных координатным и отстоящих от начала координат на расстояние 0.5. Докажите, что полученный 11-гранник U_1 является универсальной покрышкой.

(c) Разбейте 11-гранник U_1 на 4 части диаметра < 1. Выведите отсюда справедливость гипотезы Борсука в пространстве.

(d) Разбейте 11-гранник U_1 на 4 части диаметра $\leqslant 0.9888$.

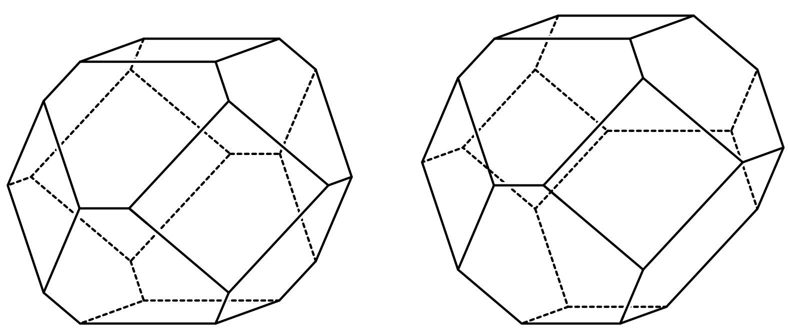

Рис. 1. *Многогранники U_1 и U_2*

8*. *Ромбододекаэдром* называется многогранник, являющийся выпуклой оболочкой множества точек в $\mathbb{R}^3$ вида $(\pm1, \pm1, \pm1)$ (восемь вершин) и $(0, 0, \pm2)$ (шесть вершин). Это двенадцатигранник, грани которого суть ромбы.

(a) Докажите, что в качестве универсальной покрышки в $\mathbb{R}^3$ можно взять ромбододекаэдр, у которого расстояние между любыми двумя параллельными гранями равно 1.

(b) Докажите, что данный ромбододекаэдр останется универсальной покрышкой, если отсечь от него «шапочки» по тому же принципу, что и в задаче 7b.

(c) Разбейте множество без шапочек из (a) на 4 части диаметра < 1.

(d) Разбейте множество без шапочек из (a) на 4 части диаметра $\leqslant 0.98$.

9. 11-гранник U_1 определен в задаче 7b. Определим многогранник U_2 аналогично, отсекая от правильного октаэдра шесть пирамид шестью плоскостями, параллельными диагональным сечениям октаэдра. Три из этих плоскостей (взаимно перпендикулярные) проходят на расстоянии 0.5 от центра октаэдра, три остальные плоскости (тоже взаимно перпендикулярные) — на расстоянии 0.525.

(a) Докажите, что для любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ диаметра 1 существует такое движение φ, что либо $\Omega \subset \varphi(U_1)$, либо $\Omega \subset \varphi(U_2)$.

(b) Разбейте каждое из множеств U_1, U_2 на 4 части диаметра < 1.

(c) Разбейте каждое из множеств U_1, U_2 на 4 части диаметра $\leqslant 0.9843$.

10*. Проблема Гэйла. Существует ли множество в $\mathbb{R}^3$, которое нельзя разбить на 4 части диаметра < 0.9?

11*. Верна ли гипотеза Борсука

(a) в $\mathbb{R}^4$, (b) для конечных наборов точек в $\mathbb{R}^4$?

12*. Назовем множество точек *двухдистанционным*, если расстояние между любыми двумя его элементами принадлежит некоторому множеству $\{a, b\}$. Верна ли гипотеза Борсука для двухдистанционных множеств

(a) в $\mathbb{R}^4$, (b) в $\mathbb{R}^n$?

Задачи 10, 11 и 12b являются нерешенными.

13. [15] Выпуклое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством постоянной ширины,* если расстояние между любыми двумя его параллельными опорными гиперплоскостями (т. е. прямыми для $n = 2$) одно и то же. Примеры: круг, треугольник Рело.

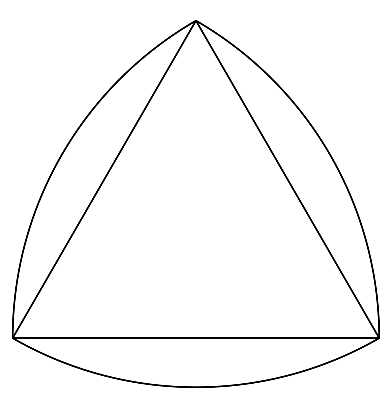

Рис. 2. *Треугольник Рело*

(a) Докажите, что любое выпуклое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ диаметра 1 покрывается множеством постоянной ширины 1 (и, как следствие, диаметра 1).

(b) То же с заменой $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^n$.

(c) Докажите теорему Ленца: *n-мерное множество постоянной ширины нельзя разбить на n частей меньшего диаметра.*

14. Проблема Грюнбаума. [6] *Требуется найти минимальное число $g(n)$ (открытых) шаров диаметра 1, которыми может быть покрыто произвольное множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^n$. Иными словами,*

$$g(n) = \max_{\Omega} \min\{g : \Omega \subset B_1 \cup \dots \cup B_g, \quad \operatorname{diam} B_i = \operatorname{diam} \Omega \text{ \textit{для любого} } i\}.$$

(a) Найдите $g(2)$.

(b) Найдите или оцените $g(3)$.

(c) Докажите, что при достаточно большом n выполнено неравенство $g(n) > n + 1$. Найдите как можно меньшее значение размерности n, в которой это так.

(d) Докажите, что $g(n) > n + 1$ при $n \geqslant 4$.

(e)* Докажите, что $g(n) > c^n$ для некоторого $c > 1$.

Графы и игры
(А.М. Райгородский)

Игра Эренфёйхта. Даны графы $G = (V, E)$ и $H = (W, F)$. Также фиксировано некоторое число $t > 0$. Двое — Добытчик и Повторитель — играют в игру, которую мы обозначим $EHR(G, H, t)$. Всего в игре t раундов. В каждом раунде сперва делает ход Добытчик, затем настает черед Повторителя. Всякий раз Добытчик выбирает по своему усмотрению один из двух графов и из множества его вершин извлекает какую-нибудь одну. Таким образом, в i-м раунде игры Добытчик, делая свой ход, берет либо произвольную вершину $x_i \in V$, либо произвольную вершину $y_i \in W$. Повторитель вслед за Добытчиком также должен достать из какого-то графа некоторую его вершину; только у него уже нет такой свободы выбора, как у Добытчика, и свою вершину он обязан брать из графа G, коль скоро его противник воспользовался графом H, и наоборот. В конечном итоге выбранными окажутся $x_1, \dots, x_t \in V$ и $y_1, \dots, y_t \in W$. Мы скажем, что Повторитель выиграл, если ему удалось так «скопировать» действия Добытчика, чтобы графы $G|_{\{x_1,\dots,x_t\}}$ и $H|_{\{y_1,\dots,y_t\}}$ были «упорядоченно изоморфны». Здесь $G|_{\{x_1,\dots,x_t\}} = (\{x_1, \dots, x_t\}, E')$, так что $(x_i, x_j) \in E'$ тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) \in E$. Графы *упорядоченно изоморфны*, коль скоро условие $(x_i, x_j) \in E'$ равносильно условию $(y_i, y_j) \in F'$.

1. Пусть в графе G есть изолированная вершина, а в графе H таких вершин нет. Докажите, что у Добытчика всегда имеется выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, 2)$.

2. Пусть граф G содержит K_4 (полный подграф на четырех вершинах). Предположим, что в H таких подграфов нет. При каком минимальном t у Добытчика заведомо есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, t)$?

3. Пусть граф G содержит K_5. Допустим, граф H планарен. Существует ли t, при котором у Добытчика всегда есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, t)$?

Определение радиуса графа. Назовем *расстоянием* между двумя вершинами x, y графа $G = (V, E)$ длину $d(x, y)$ кратчайшего реберного пути, которым эти вершины соединены. Обозначим через $e(x)$, $x \in V$, величину $e(x) = \max\limits_{y \in V} d(x, y)$. Будем говорить, что $r(G) = \min\limits_{x \in V} e(x)$ — это *радиус* графа G.

4. Пусть $r(G) \leqslant 2$, а $r(H) > 2$. Существует ли t, при котором у Добытчика всегда есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, t)$?

5. Для каждого $t > 0$ постройте примеры таких графов G, H, что у Повторителя есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, t)$.

Язык первого порядка для графов. Алфавит языка первого порядка для описания тех или иных свойств графов состоит из символов $x, y, \ldots$, обозначающих вершины графа. Далее, имеются значки «$=$» и «$\sim$»; здесь под $x \sim y$ подразумевается смежность вершин x, y. Есть также стандартные логические символы типа кванторов $\forall$ и $\exists$, импликации, конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и проч. Фразы должны быть конечными.

6. Запишите свойство «граф имеет изолированную вершину» на языке первого порядка.

7. Запишите свойство «граф содержит K_4» на языке первого порядка.

8. Запишите свойство «граф имеет радиус $\leqslant 2$» на языке первого порядка.

9. Можно ли записать на языке первого порядка свойство «граф связен»?

10. Можно ли записать на языке первого порядка свойство «граф не планарен»?

11*. Докажите, что если граф G обладает свойством A, которое можно записать на языке первого порядка, а граф H этим свойством не обладает, то существует $t = t(A)$, при котором Добытчик заведомо располагает выигрышной стратегией в игре $EHR(G, H, t)$.

Случайные графы. Для каждого целого положительного n положим $V_n = \{1, \ldots, n\}$ и зафиксируем $p = p(n) \in (0, 1)$. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$, в котором $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$, так что $|\Omega_n| = 2^{C_n^2}$, $\mathcal{B}_n = 2^{\Omega_n}$ и $P_n(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}$. Назовем произвольный элемент из Ω_n *случайным графом в модели* $G(n,p)$. Можно понимать это так: в случайном графе на данных n вершинах ребра проводятся независимо друг от друга с вероятностью p. Иными словами, речь идет о схеме Бернулли с C_n^2 независимыми испытаниями. Найти вероятность того, что случайный граф $G \in \Omega_n$ обладает некоторым свойством A, — это то же самое, что найти вероятность множества $B \in \mathcal{B}_n$ всех графов $G \in \Omega_n$, которые этим свойством обладают. Мы скажем, что G обладает свойством A (*асимптотически*) *почти наверное* (*п.н.*), если

$$P_n(G \text{ обладает свойством } A) \to 1, \quad n \to \infty.$$

12. Докажите, что при $p = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ граф п.н. двудолен.

13. Докажите, что при $p = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ граф п.н. не содержит треугольников.

14. Докажите, что при $p \geqslant \dfrac{3\log n}{n}$ граф п.н. связен.

15. Пусть дана функция $p = p(k) \in (0, 1)$, G — случайный граф в модели $G(n, p(n))$, а H — случайный граф в модели $G(m, p(m))$. Пусть, далее, A — некоторое свойство графа, которое можно записать на языке первого порядка. Предположим, наконец, что для данного p и для произвольного фиксированного t выполнено

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P(\text{Повторитель имеет выигрышную стратегию в игре } EHR(G,H,t)) = 1.$$

С помощью результата задачи 11* докажите, что тогда свойство A либо п.н. выполнено, либо п.н. не выполнено.

16. Скажем, что граф $G = (V, E)$ обладает свойством F_s (где s — целое положительное), если для любых натуральных a, b, $a + b \leqslant s$, и для произвольных $u_1, \ldots, u_a, v_1, \ldots, v_b \in V$ найдется такая вершина $x \in V$, что x смежна с каждой вершиной u_i, $i = 1, \ldots, a$, и x не смежна ни с одной из вершин v_j, $j = 1, \ldots, b$. Предположим, что графы G и H обладают свойством F_s. Докажите, что тогда Повторитель заведомо располагает выигрышной стратегией в игре $EHR(G, H, t)$ с любым $t \leqslant s$.

17. Докажите, что при $p = const$ и $s = const$ п.н. граф обладает свойством F_s.

18. С помощью результатов задач 15, 16 и 17 докажите, что при любом постоянном p имеет место *закон нуля и единицы* для свойств графов, ко-

торые записываются на языке первого порядка: такое свойство либо п.н. выполнено, липо п.н. не выполнено.

19*. Докажите, что при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, не всегда имеет место закон нуля и единицы для свойств графов, которые записываются на языке первого порядка. (Нужно привести пример числа α, а также некоторого свойства, асимптотическая вероятность которого в модели $G(n,p)$ не есть ни 0, ни 1.)

20**. Докажите, что результат задачи 18 верен при всех $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Принцип вложенных отрезков, или примени теорему Бэра о категории (А. Б. Скопенков)

Этот цикл задач посвящен мощному средству доказательства теорем существования. В анализе с помощью нее доказывается, например, теорема Банаха об обратном операторе, которая применяется для доказательства существования решений нелинейных уравнений. В топологии теорема Бэра применяется, например, к вложениям компактов и к аппроксимации отображений гомеоморфизмами (ср. [9, 22]).

0. Объединение открытых интервалов $U \subset \mathbb{R}$ не является ограниченным. Докажите, что существует такое x, что $nx \in U$ для бесконечно большого количества целых n.

Указание. Сначала докажите, что

– существует такое $x_1 \in (0,1)$, что $n_1 x_1 \in U$ для некоторого $n_1 > 1$.

Тогда

– существует такое $\epsilon_1 > 0$, что $n_1(x_1 - \epsilon_1, x_1 + \epsilon_1) \in U$.

Потом докажите, что

– существует такое $x_2 \in (x_1 - \epsilon_1, x_1 + \epsilon_1)$, что $n_2 x_2 \in U$ для некоторого $n_2 > 2$.

И т.д.

Такие решения, основанные на принципе вложенных отрезков, удобно придумывать и записывать на языке *теоремы Бэра о категории.*

Напомним, что подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется

открытым, если для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$.

вседу плотным, если для любых $a, b \in \mathbb{R}$ пересечение $(a,b) \cap U$ непусто.

1. Теорема Бэра о категории. Пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств прямой является всюду плотным (и, в частности, непустым).

Приведенное решение задачи 1 коротко записывается так: по теореме Бэра о категории $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}U \neq \varnothing$.

2. Докажите, что существует такая последовательность $x_n \in \mathbb{R}$, что для любой возрастающей ограниченной последовательности $y_n \in \mathbb{R}$ найдется номер n, для которого $|x_n - y_n| \leqslant 1/n$.

3. Докажите следующее для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Поточечный предел непрерывных функций обязательно имеет точку непрерывности.

Указание. Множество точек непрерывности функции f — это

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \ : \ |f(y_1) - f(y_2)| < \frac{1}{n} \text{ при } x - \frac{1}{k} < y_1 < y_2 < x + \frac{1}{k}\}.$$

(b) Производная любой дифференцируемой функции имеет точку непрерывности.

(c)* Любая монотонная функция имеет точку дифференцируемости.

Указание. Здесь точки дифференцируемости «почти все» по мере, а не по Бэру.

(d) Любая липшицева функция имеет точку дифференцируемости.

Указание. Используйте предыдущий пункт и разложение липшицевой функции в разность монотонных.

4. Докажите, что если функция двух переменных непрерывна по каждой переменной, то она имеет точку непрерывности.

5. Дана бесконечно дифференцируемая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем для любого x и для

(a) всех чисел $n > N_x$;

(b)* бесконечного количества чисел n;

(c)* некоторого $n = n(x)$

выполнено $f^{(n)}(x) = 0$. Докажите, что f — многочлен.

Указание к (a). Пусть f не многочлен. Положим $U_n := \mathbb{R} - \bigcap\limits_{k=n}^{\infty}(f^{(k)})^{-1}(0)$. Тогда U_n открыто и непусто, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_k = \varnothing$. Из этих свойств множеств U_n вытекает, что *существуют такие n и максимальный интервал $(a, b) \subset U_n$, что для некоторого $\epsilon > 0$ один из интервалов $(a, a+\epsilon)$ и $(b-\epsilon, b)$ не пересекает множество U_{n+1}* (докажите!). Не уменьшая общности, $(a, a+\epsilon) \cap U_{n+1} = \varnothing$, т. е. $f^{(n+1)}([a, a+\epsilon]) = 0$. Так как $f^{(n)}(a) = 0$, то $f^{(n)}([a, a+\epsilon]) = 0$, что противоречит условию $(a, b) \subset U_n$.

6. Докажите, что

(a)* прямая не представима в виде объединения попарно непересекающихся неточечных замкнутых отрезков.

(b) плоскость не представима в виде объединения замкнутых кругов с попарно непересекающимися непустыми внутренностями.

7. (a) Дано замкнутое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$. Для любых двух точек $x, y \in A$ существует разбиение $A = X \sqcup Y$ на замкнутые множества, для которого $x \in X$ и $y \in Y$ (такие множества называются *нульмерными*). Докажите, что существует непрерывное инъективное отображение (т. е. *вложение* или реализация) $a : A \to \mathbb{R}$.

(b)* Дано замкнутое ограниченное подмножество $A \subset \mathbb{R}^{100}$. Для любых двух точек $x, y \in A$ существует разложение $A = X \cup Y$ в объединение замкнутых множеств, пересечение которых нульмерно, причем $x \in X$ и $y \in Y$ (такие множества называются *одномерными*). Докажите, что существует непрерывное инъективное отображение $a\colon A \to \mathbb{R}^3$.

(c)* *Теорема Менгера – Небелинга – Понтрягина*. Дайте определение n-мерного (замкнутого ограниченного) множества в $\mathbb{R}^N$ и докажите, что любое n-мерное множество вложимо в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Список литературы

[1] Авдеев Р., Москвин А., *Студенческая олимпиада по математике* // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 12, 2008. С. 223–227.

[2] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*. М.: Наука, 1965.

[3] Брезис Х. *Как распознать постоянные функции. Связь с пространствами Соболева* // Успехи мат. наук. Т. 54, вып. 4, 2002. С. 59–74.

[4] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. *Теорема Хелли*. М.: Мир, 1968.

[5] Долбилин Н. П. Жемчужины теории многогранников. М.: МЦНМО, 2000.

[6] Грюнбаум Б. *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* М.: Наука, 1971.

[7] Гервер М. Л. *Проблема Борсука* // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 3, 1999. С. 168–183.

[8] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. *Топологические методы в вариационных задачах*. М.: Госиздат, 1930.

[9] Ошемков А., Скопенков А. *Олимпиады по геометрии и топологии* // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 11, 2007. С. 131–140.

[10] Райгородский А. М. *Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств* // Успехи Матем. Наук. Т. 56, вып. 1, 2001. С. 107–146.

[11] Райгородский А. М. *Проблема Борсука.* М: МЦНМО, 2006.

[12] Скопенков А. *N-мерный куб, многочлены и решение проблемы Борсука* // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 3, 1999. С. 184–188.

[13] Скопенков М. *Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби* // Математическое Просвещение, сер. 3, вып. 11, 2007. С. 79–89.

[14] Эрдёш П., Спенсер Дж. *Вероятностные методы в комбинаторике*. М.: Мир, 1976.

[15] Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры*. М.: Гостехиздат, 1951.

[16] Alon N., Spencer J. *The probabilistic method.* Wiley - Interscience Series in Discrete Math. and Optimization, Second Edition, 2000.

[17] Bollobás B. *Random Graphs*. Cambridge Univ. Press, Second Edition, 2001.

[18] Efimov A. *The asymptotics for the number of real roots of the Bernoulli polynomials*. Eprint, 2006. arXiv:math/0606361.

[19] Raigorodskii A. M. *The Borsuk partition problem*: *the seventieth anniversary* // Mathematical Intelligencer, V. 26, N4, 2004. P. 4–12.

[20] Skopenkov A. *Borsuk's problem* // Quantum. Vol. 7, no 1, 1996. P. 16–21, 63.

[21] Skopenkov M. *On approximability by embeddings of cycles in the plane* // Topol. Appl. Vol. 134, 2003. P. 1–22.

[22] Skopenkov A. *A characterization of submanifolds by a homogeneity condition* // Topol. Appl. Vol. 154, 2007. P. 1894-1897. `http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2007.03.002`, `http://arxiv.org/abs/math.GT/0606470`

В. И. Богачев, А. М. Райгородский, Н. А. Толмачев: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

А. Б. Скопенков: механико-математический факультет МГУ, Независимый московский Университет, Московский институт открытого образования
e-mail: `skopenko@mccme.ru`