Нам пишут

Дополнение к статье Д. А .Михалина, И. М. Никонова «Одна задача о нахождении фальшивой монеты»

А. Я. Канель-Белов Б. Р. Френкин

При редактировании статьи[1] мы заметили один факт общего характера, позволяющий дать другое доказательство основного результата.

Напомним, что рассматривались задачи следующего вида. *Имеется некоторое количество монет, из них одна фальшивая, немного отличающаяся по весу от других, а все остальные настоящие и одинаковые. Можно ли за данное число взвешиваний на рычажных весах без гирь найти фальшивую монету*: а) *определив ее относительный вес* (*т. е. легче она или тяжелее остальных*), б) *не определяя относительный вес*? *При этом мы можем иметь запас настоящих монет либо не иметь.*

Последующие рассуждения базируются на факте, который доказывается по аналогии с решением задачи 4.

Основная лемма. *Пусть за n взвешиваний можно найти фальшивую среди m монет* (*возможно, не определив ее относительный вес*). *Тогда при наличии дополнительной заведомо настоящей монеты можно среди $m-1$ монет за n взвешиваний найти фальшивую и определить ее относительный вес.*

Действительно, добавим дополнительную монету к $m-1$ исходным и будем действовать по алгоритму для m монет и n взвешиваний, причем взвесим дополнительную монету лишь в тот момент (если он наступит), когда невзвешенных монет не должно остаться. Это можно сделать,

[1] «Математическое просвещение», вып. 11, с. 149–158, 2007 г.

поскольку невзвешенные монеты неразличимы в рамках алгоритма взвешивания. В итоге мы найдем фальшивую монету, и нужно показать, что мы определили ее относительный вес, т. е. что она попала на весы. Если это неверно, то фальшивая монета — невзвешенная, причем единственная невзвешенная (в противном случае мы не знаем, какая из невзвешенных монет фальшивая). Но тогда дополнительная монета взвешена, а значит, взвешены и все монеты. Получено противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

Многократно применяя основную лемму, получаем

Следствие 1. *Пусть за n взвешиваний можно найти фальшивую среди m монет (возможно, не определив ее относительный вес). Тогда при наличии достаточного запаса настоящих монет можно среди любого меньшего количества монет за n взвешиваний найти фальшивую и определить ее относительный вес*[2].

Отметим, что *проведенные рассуждения не зависят от того, используются ли заведомо настоящие монеты в алгоритме для m монет.*

Следствие 2. *Независимо от наличия запаса настоящих монет, нельзя за n взвешиваний найти фальшивую из более чем $(3^n+1)/2$ монет, даже если не требуется определить ее относительный вес.*

Действительно, в противном случае мы могли бы, согласно следствию 1, за n взвешиваний найти фальшивую среди $(3^n+1)/2$ монет и определить ее относительный вес. Но это противоречит результату задачи 2а из статьи.

Рассматривая первое взвешивание, получаем теперь

Основной результат статьи (задача 5). *За n взвешиваний при отсутствии запаса настоящих монет нельзя из более чем $(3^n-1)/2$ монет найти фальшивую (даже если не требуется определить ее относительный вес).*

Действительно, пусть из некоторого количества монет (при отсутствии запаса настоящих) можно найти фальшивую за n взвешиваний.

Рассмотрим первое взвешивание. Если чашки не уравновесились, то фальшивая монета — среди взвешенных, и для каждой из взвешенных монет мы знаем ее относительный вес в случае, если она фальшивая. За оставшиеся $n-1$ взвешиваний можно найти фальшивую среди этих монет.

[2] Заведомо настоящих монет в любой ситуации требуется не больше, чем «подозрительных» (подлежащих проверке). Действительно, если на обеих чашках весов есть заведомо настоящие, то по одной можно снять. Повторяя это действие, получим, что все монеты на одной из чашек — «подозрительные», и заведомо настоящих требуется не большее количество.

Следовательно (см. решение задачи $1'$ из статьи), их количество не больше 3^{n-1} — а в действительности меньше, поскольку четно.

Если же весы в равновесии, то фальшивая монета — среди невзвешенных, причем ее можно найти за оставшиеся $n-1$ взвешиваний. Согласно следствию 2, количество невзвешенных монет не превосходит $(3^{n-1}+1)/2$. Значит, общее количество монет не превосходит $(3^{n-1}-1)+(3^{n-1}+1)/2 = (3^n-1)/2$, что и требовалось.

Резюмируя доказанное здесь и в статье, получаем следующую картину.

Пусть из данного количества монет можно найти фальшивую за n взвешиваний. Тогда максимальное возможное количество монет равно:

если относительный вес фальшивой монеты известен заранее — 3^n (независимо от наличия запаса настоящих монет);

если относительный вес не известен и его требуется узнать — при отсутствии запаса настоящих монет $(3^n-3)/2$, при наличии $(3^n-1)/2$;

если не требуется узнать относительный вес — при отсутствии запаса настоящих монет $(3^n-1)/2$, при наличии $(3^n+1)/2$.

А. Я. Канель-Белов, МИОО
Б. Р. Френкин, ЦЭМИ, МЦНМО