Сколько ступенек на эскалаторе?

К. Э. Каибханов

Каждый может принимать решение, обладая достаточной информацией. Хороший руководитель принимает решение и при ее нехватке. Идеальный — действует в абсолютном неведении.

Как-то раз, встав на ступеньку эскалатора, я обратил внимание на номер ступеньки: 285. Возник естественный вопрос: сколько всего ступенек? Ясно, что не меньше 285. Можно ли сделать какое-нибудь разумное предположение о числе ступенек исходя только из того, что имеется ступенька с номером 285? Решением этой задачи мы и займемся.

Сначала формализуем задачу. Пусть имеется ящик («урна», как любят писать в учебниках по теории вероятностей) с карточками, пронумерованными числами от 1 до n. Число n нам неизвестно. Предлагается наудачу извлечь из ящика одну карточку и по выпавшему номеру k сделать предположение о числе карточек. Другими словами, надо придумать такую функцию φ, которая натуральному числу k — номеру выпавшей карточки — ставит в соответствие натуральное число $\varphi(k)$ — предполагаемое число карточек.

Какую бы функцию мы ни взяли, если число n большое, то при случайном значении k значение $\varphi(k)$ вряд ли точно совпадет с n. Поэтому речь идет не об угадывании правильного ответа, а о некотором разумном выборе функции φ — выборе, который в некотором смысле лучше других.

Давайте придадим всему этому количественный характер. Пусть n карточек занумерованы числами от 1 до n. Мы с одинаковой вероятностью, равной $1/n$, можем достать любую из них. Тогда равновероятно, что абсолютная погрешность $|\varphi(k)-n|$ примет значения $|\varphi(1)-n|$, $|\varphi(2)-n|$, ..., $|\varphi(n)-n|$. Естественно считать, что чем меньше величина

$$\lambda_n(\varphi)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}|\varphi(k)-n|\,, \tag{1}$$

тем удачнее выбрана функция φ. Обозначим

$$\lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\varphi). \tag{2}$$

Величину $\lambda(\varphi)$ — функцию от функции — мы возьмем за оценку погрешности функции φ. Чем меньше $\lambda(\varphi)$, тем удачнее выбрана функция φ. (Следует отметить, что предел (2) существует не для всех функций φ. В рассматриваемом ниже случае линейной функции предел существует.)

Мы ограничимся решением задачи наилучшего выбора функции φ в классе линейных функций, то есть займемся поиском функции $\varphi(k) = ak$, для которой величина $\lambda(\varphi)$ принимает наименьшее значение. Для такой функции

$$\lambda_n(\varphi) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} |ak - n| = \sum_{k=1}^{n} \left| a\cdot\frac{k}{n} - 1\right| \cdot \frac{1}{n}\,.$$

Поскольку последнее выражение является интегральной суммой функции $f(x) = |ax-1|$ на отрезке $[0;1]$, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем:

$$\lambda(\varphi) = \int_0^1 |ax-1|\,dx\,.$$

Пользуясь определением модуля и свойствами интеграла, вычисляем:

$$\int_0^1 |ax-1|\,dx = \int_0^{1/a} (1-ax)\,dx + \int_{1/a}^1 (ax-1)\,dx =$$

$$= \left(x - \frac{a}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{1/a} + \left(\frac{a}{2}x^2 - x\right)\Big|_{x=1/a}^{1} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) + \left(\frac{a}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{a} - 1 = \left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \sqrt{2} - 1 \geqslant \sqrt{2} - 1,$$

причем равенство достигается лишь при условии $\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{a}$, то есть при $a = \sqrt{2}$.

Таким образом, наилучшей среди функций вида $\varphi(k) = ak$ оказалась функция $\sqrt{2}\cdot k$. Например, при $k = 285$ разумно предположить, что число всех ступенек $n \approx 285\sqrt{2} \approx 403$.

* * * * * *

Оценка погрешности по формулам (1–2) не единственно возможная. Например, рассмотрим формулы

$$\lambda_{n,p} = \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} |\varphi(k) - n|^p,$$

$$\lambda_p(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \lambda_{n,p}(\varphi),$$

где $p > 0$. По-прежнему будем искать наилучшую функцию среди линейных функций: $\varphi(k) = ak$. Тогда, как легко проверить,

$$\lambda_{n,p}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right|^p \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lambda_p(\varphi) = \int_0^1 |ax - 1|^p \, dx,$$

$$\lambda_p = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot ((a-1)^{p+1} + 1).$$

Продифференцировав по a величину $\lambda_p(\varphi)$ и приравняв производную к нулю, получаем уравнение

$$(a-1)^p(pa+1) = 1.$$

Функция $f(a) = (a-1)^p(pa+1)$ является произведением двух положительных строго возрастающих функций и, следовательно, строго возрастает на $[1; +\infty)$. Поскольку $f(1) = 0 < 1$ и $f(2) = 2p + 1 > 1$, из непрерывности функции f следует, что в некоторой единственной точке $a_p \in (1; 2)$ выполнено равенство $f(a_p) = 1$. Легко проверить, что величина $\lambda_p(\varphi)$ принимает минимальное значение именно при $a = a_p$.

К. Э. Каибханов, Таганрогский технологический институт Южного федерального университета, г. Таганрог