Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. $\cos\alpha = 1/3$. Докажите, что градусная мера угла α иррациональна. (*Фольклор*)

2. В пространстве расположено несколько плоскостей общего положения (никакие три не параллельны одной прямой, и все не пересекаются в одной точке). Они делят пространство на несколько частей и в каждой части записан знак — плюс или минус. Разрешается изменить все знаки во всех частях внутри любого тетраэдра, образованного данными плоскостями. Докажите, что за несколько операций можно сделать так, чтобы во всех ограниченных частях стояли плюсы. (*А. Канель*)

3. Вершины A и B графа G назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями без общих промежуточных вершин. Докажите, что любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями без общих ребер. (*А. Скопенков*)

4. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, M — их среднее арифметическое, G — их среднее геометрическое. Докажите, что для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется неравенство:
$$1 + \rho < a_i/M < 1 + \rho',$$
где $\rho < 0$ и $\rho' > 0$ корни трансцендентного уравнения
$$(1 + x)e^{-x} = (G/M)^n.$$
(*А. Тартаковский*)

5. Можно ли из трех стержней и нескольких нитей изготовить жесткую пространственную конструкцию так, чтобы стержни не соприкасались между собой, а были бы связаны нитками, прикрепленными к их концам? (*Фольклор*)

6. Докажите, что монотонная функция дифференцируема в некоторой точке. (*Теорема Лебега*)

7. а) Может ли определитель 10×10 матрицы с коэффициентами $0, \pm 1$ превосходить 2007? б) (Задача на исследование.) Оцените максимально возможный определитель для матрицы $n \times n$ с коэффициентами $0, \pm 1$. (*Фольклор*)

8. Пусть на плоскости даны два подобных и противоположно ориентированных треугольника с общим ортоцентром. Обозначим их через $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 имеют общую точку или параллельны друг другу. (*А. В. Акопян*)

9. В клетках бесконечной целочисленной решетки стоят целые числа. Докажите, что сумма чисел в некотором квадрате делится на 2008. (*С. В. Охитин, А. Я. Белов*)

10. Назовем множество C перестановок n элементов *хорошим*, если для любого ненулевого набора чисел $v_1, \ldots, v_n$ такого, что $\sum_i v_i = 0$, найдется такая перестановка π из множества C, что $\sum_{i=1}^{k} v_{\pi(i)} > 0$ для всех k от 1 до $n-1$. Если заменить строгое равенство на нестрогое, то получится определение *неплохого* множества. Какова мощность наименьшего хорошего (неплохого) множества? а) Мощность наименьшего неплохого множества равна n. б) Существует хорошее множество мощности $n2^n$. в) (открытая проблема) Доказать, что мощность хорошего множества экспоненциально велика по n. (*В. Л. Попов, Э. Б. Винберг*)

11. Многочлены P, Q и R таковы, что $R(P(x), Q(x)) \equiv x$. Докажите, что степень P делит степень Q, либо степень Q делит степень P. (*Терема Абьянкара – Моха*)

12. *Линейной рекуррентой порядка* n называется такая последовательность $\{u_k\}$, что при всех k
$$a_0u_{k+n} + a_1u_{k+n-1} + \cdots + a_nu_k = 0$$
где a_i — некоторые константы, не все равные нулю одновременно. *Нулем* линейной рекурренты называется такое k, что $u_k = 0$. Докажите, что множество нулей линейной рекурренты есть объединение конечного набора точек и конечного набора арифметических прогрессий. (*А. Я. Канель*)