Решения задач из предыдущих выпусков

9.6. Условие. Рассмотрим всевозможные однокруговые турниры n шахматистов. Для каждого турнира найдем количества $s_1 \leqslant \dots \leqslant s_n$ очков, набранных игроками, и возьмем в n-мерном пространстве точку с координатами $(s_1, \dots, s_n)$. Доказать, что выпуклая оболочка этих точек является $(n-1)$-мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным соответствующему кубу, а его вершины соответствуют турнирам, в которых в любой паре участников набравший больше очков выигрывает в личной встрече.

Решение. Очевидно, что $s_1, \dots, s_n$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} s_1 + \dots + s_n &= \frac{n(n-1)}{2}, \\ s_1 + \dots + s_k &\geqslant \frac{k(k-1)}{2}, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Следовательно, все отмеченные точки лежат в $(n-1)$-мерной гиперплоскости. Если не учитывать, что s_i полуцелые, то условия (1) и $s_i \leqslant s_{i+1}$ определяют многогранник, в вершинах которого, по крайней мере, $n-1$ из них обращаются в равенства. При этом, если $s_1 + \dots + s_k = k(k-1)/2$, то $s_k \leqslant k-1$ и $s_{k+1} \geqslant k$, т. е. в каждой из $n-1$ пар условий $s_k \leqslant s_{k+1}$ и $s_1 + \dots + s_k \geqslant k(k-1)/2$ в равенство обращается ровно одно. Любому из 2^{n-1} способов выбрать это условие соответствует точка вида

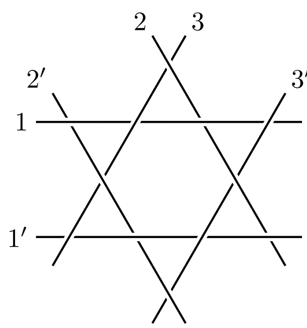
$$\begin{aligned} &s_1 = \dots = s_{k_1} = \frac{k_1 - 1}{2}, \\ &s_{k_1+1} = \dots = s_{k_1+k_2} = k_1 + \frac{k_2 - 1}{2}, \\ &\dots, \\ &s_{k_1+\dots+k_l+1} = \dots = s_n = k_1 + \dots + k_l + \frac{n-1-k_1-\dots-k_l}{2}, \end{aligned}$$

а каждой такой точке соответствует турнир, в котором участники разбиты на $l+1$ группу численностью $k_1, \dots, k_l$ и $(n-k_1-\dots-k_l)$, причем участники из одной группы играют друг с другом вничью, а во встрече участников из разных групп побеждает тот, номер группы которого больше.

Отметим также, что полученный многогранник вписан в сферу с центром в точке $(\frac{n-1}{4}, \frac{n+1}{4}, \dots, \frac{3(n-1)}{4})$, а его объем равен $n^{n-3/2}$.

Более подробно об этой задаче и ее приложениях см. А. А. Заславский, «Геометрия парных сравнений» // Автоматика и телемеханика, №3, 2007, с. 199–205. (*А. А. Заславский*)

9.8. Условие. Может ли фигура, указанная на рисунке, изображать несколько попарно скрещивающихся прямых, спроецированных на плоскость?



Ответ: нет.

Обозначим через $[ab]$ точку прямой a, проектирующуюся на плоскость рисунка в точку пересечения прямых a и b.

Повернем прямую 3 в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, относительно точки $32'$, до пересечения с прямой 1. Других точек пересечения не появится. Обозначим повернутую прямую 3 снова через 3 (а про старую прямую 3 забудем). Получился новый набор прямых, дающий проекцию, отличающуюся от данной только тем, что прямые 1 и 3 пересекаются.

(Можно было бы «сделать» точками пересечения все 6 вершин «внутреннего» шестиугольника, но это уже не нужно.)

Обозначим через ab проекцию точки $[ab]$ на прямую ℓ, перпендикулярную плоскости рисунка, вдоль плоскости, проходящей через прямые 1 и 3. Отождествим прямую ℓ с множеством вещественных чисел так, чтобы ноль отождестился с образом прямой 1 при указанной параллельной проекции, и положительное направление было в нашу сторону.

Тогда $23 > 0$ и $21 < 0$. Значит, $3'2 < 23' < 0$. Из этого и $3'1 > 0$ вытекает, что $1'3' < 3'1' < 0$. Из этого и $1'3 < 0$ вытекает, что $2'1' < 1'2' < < 0$. Это противоречит тому, что $2'1 < 0$ и $2'3 > 0$. (*А. Б. Скопенков*)

10.6. Условие. Внутри выпуклого четырехугольника взята точка, равноудаленная от противоположных сторон. Оказалось, что она лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей. Докажите, что четырехугольник является либо вписанным, либо описанным, либо трапецией.

Решение. Пусть четырехугольник не описанный и не трапеция. Тогда прямая, соединяющая середины диагоналей, является геметрическим местом вписанных в него коник. Таким образом, к конике, отличной от окружности, проведены две пары касательных, равноудаленных от ее центра. Так как касательные в каждой паре не параллельны, они симметричны относительно одной из осей коники. Если эта ось в обеих парах одна и та же, то сам четырехугольник симметричен и в него можно вписать окружность. Следовательно, прямые равноудаленные от противоположных сторон четырехугольника, перпендикулярны. Так как углы между этими прямыми равны полусуммам противоположных углов четырехугольника, он является вписанным. (*А. А. Заславский*)