Аттракторы динамических систем и философия общего положения

Ю. С. Ильяшенко

Мы повсюду видим эволюционные процессы, от движений атомов до динамики планет. Ньютон понял, что эти процессы описываются дифференциальными уравнениями и что эти уравнения полезно решать. За последующие 150 лет было понято, что большинство дифференциальных уравнений решить невозможно. Пуанкаре создал новую ветвь математики — качественную или геометрическую теорию дифференциальных уравнений. Она изучает геометрические свойства решений, непосредственно используя свойства правой части уравнения. Оказалось, что даже качественное поведение решения может быть очень сложным. Ситуация резко упрощается, если рассматривать только уравнения общего положения. С точки зрения физики, лишь последние и представляют интерес.

Исследование динамических систем можно условно разбить на три периода.

Период Ньютона: *дано дифференциальное уравнение. Решить его.*

Период Пуанкаре: *дано дифференциальное уравнение. Описать свойства его решений, не решая уравнение, а лишь используя свойства правой части.*

Период Андронова: *Не дано никакого дифференциального уравнения. Описать свойства его решений.*

Последнее высказывание звучит парадоксально. Однако важнейшие свойства дифференциальных уравнений *общего положения* на плоскости — всегда одни и те же. Эти свойства рассмотрены ниже и относятся к *предельному поведению* всех решений. Следовательно, чтобы узнать это поведение, нужно лишь убедиться, что уравнение — общего положения. Ниже показано, как это сделать на физическом уровне строгости. В размерности выше двух возникает сходная, но более сложная ситуация. Обсуждению этих тем и посвящена статья.

Yu. I. Ilyashenko, “Attractors of dynamical systems and philosophy of generic position”. Публикуется с любезного разрешения автора. Перевод Б. Р. Френкина.

Законы эволюции и дифференциальные уравнения. Рассмотрим некоторую физическую систему — скажем, искусственный спутник в гравитационном поле Земли или Солнечной системы (Солнца и планет). В каждый момент времени *состояние* этой системы описывается конечным количеством числовых параметров: $x_1, \ldots, x_n$. Для спутника состояние определяется *положением и скоростью*, т. е. количество параметров равно шести: три координаты положения в пространстве и три компоненты вектора скорости. Множество этих параметров можно рассматривать как точку x в многомерном пространстве $\mathbb{R}^n$. *Закон эволюции* указывает, как меняется состояние системы; скорость этого изменения зависит только от состояния. Для спутника скорость изменения состояния (так называемая *фазовая скорость*) состоит из скорости и ускорения движения спутника. Отметим, что скорость движения не следует смешивать с фазовой скоростью. Итак, для каждого состояния x определяется такой вектор фазовой скорости $v(x)$, что производная от x по времени, которая обозначается $\dot{x}$ (то же самое, что $\frac{dx}{dt}$), удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = v(x). \tag{1}$$

Решить это уравнение — означает указать, каково будет состояние системы $x(t)$ в момент времени t. Чтобы сделать это однозначно, нужно лишь знать начальное состояние $x(0)$. Это утверждение называется *теоремой существования и единственности* решений дифференциальных уравнений.

Лапласовский детерминизм. Ньютон первым понял, что эволюционные процессы во Вселенной описываются дифференциальными уравнениями. Лаплас осознал, что теорема существования и единственности имеет философские следствия. Он выразил эту идею в следующих прекрасных словах:

«Разум, который для какого-нибудь момента знал бы все силы, действующие в природе, и относительное расположение ее составных частей, если бы он, кроме того, был достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, обнял бы в единой формуле движения самых огромных тел во вселенной и самого легкого атома; для него не было бы ничего неясного, и будущее, как и прошлое, было бы у него перед глазами.» (Цит. по: С. Лаплас, «Изложение системы мира». Л.: Наука, 1982, с. 364–365.)

Геометрическая точка зрения на дифференциальные уравнения. Никто еще не написал дифференциальное уравнение, о котором мечтал Лаплас. Вернемся теперь на землю и рассмотрим простейшие примеры дифференциальных уравнений *с геометрической точки зрения*. Когда изменяется время, состояния системы $x(t)$ проходят кривую в фазовом пространстве, которая называется *фазовой кривой* или *орбитой* уравнения (1). С точки зрения геометрии, найти орбиту — значит решить следующую задачу: *по данному векторному полю v и точке x_0 найти такую кривую в фазовом пространстве, что x_0 ей принадлежит и каждая точка x кривой — касательная к заданному вектору $v(x)$.*

Примеры. Радиальное поле. Если $v(x) = x$, то все орбиты (с единственным исключением) — открытые лучи, исходящие из нуля. Исключением является орбита $x(t) \equiv 0$. Она состоит только из нуля и называется *особой точкой* или *положением равновесия.*

Поворот на прямой угол. В этом примере x принадлежит плоскости, $v(x) = Ix$, что означает вектор x, повернутый на $\frac{\pi}{2}$. Орбиты этого поля — окружности с центром в нуле, а также положение равновесия (нуль).

Пуанкаре первым понял, что, вообще говоря, орбиты векторного поля можно описать геометрически, исходя из геометрии самого векторного поля $v(x)$.

Предельное поведение решений. Когда мы включаем электронное устройство, проходит короткое время, пока система пройдет переходный период и войдет в стационарный режим (который, вообще говоря, не является положением равновесия). Но этот переходный период краток лишь с точки зрения человека. Внутренние изменения в системе происходят очень быстро, так что ее «внутреннее время» очень быстро течет, и с точки зрения системы этот короткий переходный период очень велик (практически бесконечен). Поэтому стационарный режим можно охарактеризовать как *предельное поведение* решения.

Теорема Пуанкаре – Бендиксона. Для дифференциальных уравнений на плоскости задача о предельном поведении решений может быть решена в чисто геометрической постановке. Пусть плоскость разбита на гладкие кривые, которые не пересекаются попарно и сами с собой, причем кривая меняется гладко вместе с «начальной точкой», через которую она проходит. Пусть при этом все орбиты системы входят в некоторый большой круг и остаются там; такая система называется *диссипативной.* Для физических систем это соответствует некоторому предположению о *рассеянии энергии.* Тогда для предельного поведения любой кривой из этого семейства возможны следующие варианты:

a) орбита входит в состояние равновесия,

b) орбита обматывается вокруг замкнутой орбиты,

c) орбита обматывается вокруг многоугольника, образованного состояниями равновесия и орбитами, которые их соединяют (они называются *сепаратрисами* или *сепаратрисными связками*). Случаи a), b) и c) показаны на рис. 1.

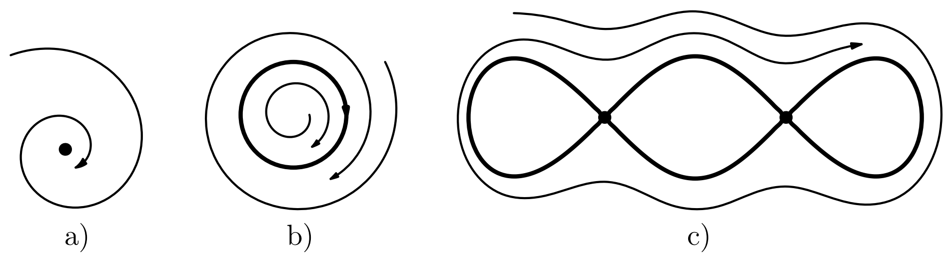

Рис. 1. *Плоские ω-предельные множества*

Такая классификация непосредственно вытекает из известной *теоремы Пуанкаре – Бендиксона*, которая стала одним из крупнейших успехов топологического подхода к дифференциальным уравнениям.

Общее положение Поведение, описанное выше, не очень сложно, но и не очень просто. Предельные множества типа c) могут быть сложными. Положение спасает тот факт, что *тип c) — не общего положения*, а потому не должен возникать в системах физического происхождения. Говоря подробнее, если процесс не подчинен никакому закону сохранения или соотношению симметрии, то следует ожидать, что для системы (1), моделирующей этот процесс, не выполняется никакое условие типа *равенства*.

Например, линейные операторы, естественно связанные с уравнением (1) (скажем, линеаризация поля в положениях равновесия или производная отображения Пуанкаре) не должны иметь собственных значений, равных 0 или 1 по абсолютной величине. Особые точки дифференциальных уравнений общего положения на плоскости могут быть только трех типов: a) сёдла, b) узлы, c) фокусы, см. рис. 2.

Что более важно, *векторное поле общего положения на плоскости не имеет седловых связок*. Действительно, любую связку между двумя седлами можно разрушить малым возмущением, см. рис. 3. Наивное представление о *свойствах общего положения* было формализовано Р. Томом в форме *теоремы трансверсальности*. Том был одним из создателей *тео-*

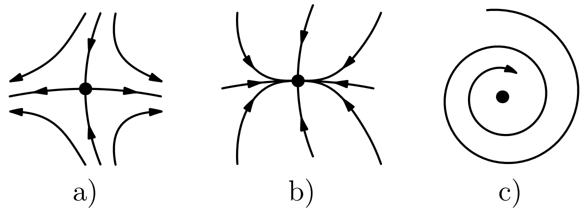

Рис. 2. *Особые точки общего положения на плоскости*

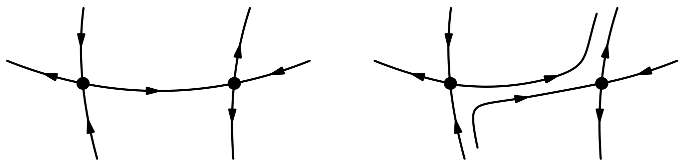

Рис. 3. *Седловая связка и ее разрушение*

рии катастроф, которая изучает и классифицирует особенности систем, находящихся в общем положении.

Теорема Андронова Как следствие предыдущих рассмотрений, Андронов получил следующую теорему:

Физический процесс без симметрий и законов сохранения, моделируемый плоской диссипативной системой, имеет конечное количество предельных режимов для решений. Каждый из этих режимов либо является положением равновесия, либо периодичен.

Действительно, предельными режимами могут быть только положения равновесия или периодические траектории: вариант c), как уже сказано выше, требует наличия седловой связки и потому невозможен для типичного поля. При этом для типичного поля вдоль любой периодической траектории отображение Пуанкаре имеет производную, отличную от единицы (то есть любая периодическая траектория либо притягивает, либо отталкивает). Как следствие, в достаточно малой окрестности такой траектории не содержится других периодических траекторий. Все особые точки типичного векторного поля — сёдла, узлы и фокусы, поэтому в достаточно малой окрестности любой из них также нет ни других положений равновесия, ни (не выходящих за эту окрестность) периодических траекторий.

С другой стороны, все предельные режимы сосредоточены в поглощающем круге из определения диссипативности. Если их бесконечно много, они должны куда-то накапливаться, что противоречит только что сказанному. Поэтому предельных режимов (как положений равновесия, так и периодических траекторий) может быть лишь конечное число.

Мечта середины века. В середине прошлого века некоторые специалисты мечтали обобщить теорему Андронова на случай высших размерностей. А именно, они ожидали, что в предыдущем утверждении можно заменить «плоский» на «многомерный». В конце 50-х годов Смейл опубликовал эту гипотезу вместе с подробным описанием, как должна выглядеть динамическая система общего положения на компактном многообразии. Описанные им системы ныне составляют важный класс и называются *системами Морса – Смейла*. Однако оказалось, что они не общего положения.

Как только появилась статья Смейла, специалисты старшего поколения сообщили ему, что в статьях Картрайта, Литлвуда и Левинсона были построены динамические системы *с бесконечным количеством периодических орбит*, причем это свойство выдерживает малые возмущения.

С тех пор вопрос о том, *каковы свойства динамических систем общего положения*, является одним из главных в этой области. Он породил множество достижений, но всё еще остается нерешенным в полной общности. Один из его частных случаев приведен в конце этой статьи.

Подкова Смейла. Вместо того, чтобы изучать работы предшественников, довольно длинные и сложные, Смейл попытался понять, как вообще могло случиться, что динамическая система может устойчиво иметь счетное количество периодических орбит? Бродя вдоль пляжа Копакабана в Рио, он придумал простой ответ, впоследствии назвнный *подкова Смейла*.

Со времен Пуанкаре было понятно, что дифференциальные уравнения и итерации отображений — ветви одной и той же теории. Поэтому ответ Смейла формулируется в терминах двумерных отображений. Отображение подковы Смейла f строится как композиция отображений прямоугольника, показаных на рис. 4 и описанных ниже.

Отображение f_1 сжимает заштрихованный прямоугольник D в горизонтальном направлении и растягивает в вертикальном. Отображение f_2 сгибает растянутый прямоугольник в подкову. Отображение f_3 передвигает подкову так, чтобы она пересекла D, как показано на рисунке.

Это отображение имеет бесконечное количество периодических орбит и другие замечательные свойства, устойчивые относительно малых возмущений.

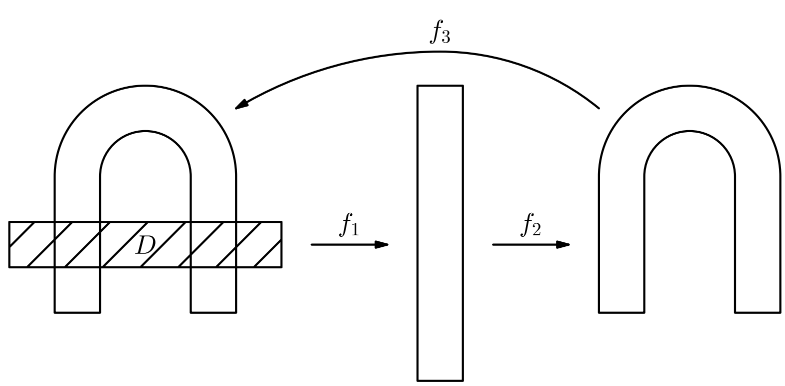

Рис. 4. *Подкова Смейла*

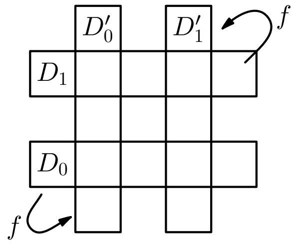

Рис. 5. *Упрощенная подкова Смейла*

На рис. 5 показан еще более простой вариант, который также называют подковой Смейла. Возьмем единичный квадрат и разобьем его на пять равных горизонтальных прямоугольников. Пусть D_0 и D_1 — соответственно второй и четвертый прямоугольник снизу. Разобьем тот же квадрат на пять равных вертикальных прямоугольников. Пусть D'_0 и D'_1 — второй и четвертый прямоугольник слева. Положим $D = D_0 \cup D_1$, $D' = D'_0 \cup D'_1$, и пусть f — отображение, которое сжимает D_j в 5 раз по горизонтали, растягивает в 5 раз по вертикали и параллельно переносит на место D'_j $(j = 0, 1)$. Таким образом, f — кусочно аффинное отображение, заданное одной формулой на D_0 и другой — на D_1. Отображение f можно продолжить до диффеоморфизма сферы, но нас интересует ограничение этого диффеоморфизма на D, которое уже определено выше. Если, соответственно, все итерации отображения f корректно определены в некоторой точке $x \in D$ и принадлежат D, то мы говорим, что x обладает *полной орбитой* относительно f. Множество всех точек с полной орбитой обозначается Λ. *Оказывается,* $\Lambda = C' \times C'$ *— декартово произведение двух канторовых множеств.*

Для любой точки $x \in \Lambda$ можно определить ее *судьбу* как двустороннюю последовательность из нулей и единиц:

$$\omega = \ldots \omega_{-n} \ldots \omega_{-1} \omega_0 \ldots \omega_n \ldots$$

А именно, $\omega_n = j \Leftrightarrow f^n(x) \in D_j$. Оказывается, *любую последовательность из нулей и единиц можно реализовать как судьбу одной и только одной точки.*

Как следствие получаем, что любая точка, судьба которой — периодическая последовательность, сама периодична. Поскольку существует бесконечное количество периодических последовательностей, f имеет бесконечное количество периодических точек.

Чувствительность к начальным условиям и опровержение лапласовского детерминизма. Элементарный анализ отображения подковы Смейла показывает, что для любой пары точек $x, y \in \Lambda$, с точностью

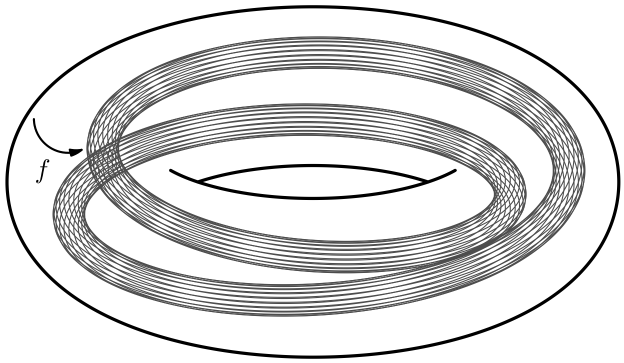

Рис. 6. *Соленоид Смейла – Вильямса*

до 5^{-n} совпадающих, их судьбы совпадают на первых n шагах (как вперед, так и назад). После этого их судьбы могут различаться произвольным образом, как если кто-то бросает монету. Расстояние между точками орбит после этих n шагов будет порядка 1. Этот эффект называется *чувствительностью к начальным условиям*.

В двух последовательных опытах с реальными физическими системами невозможно достичь идеального совпадения начальных условий. Малая, физически пренебрежимая ошибка через довольно короткое время приведет к резкому различию между орбитами. Значит, *невозможно предсказать долговременное поведение решений динамических систем с чувствительностью к начальным условиям.*

Странные аттракторы. Недостаток предыдущего примера в том, что «почти все» точки из D не имеют полных орбит относительно отображения подковы Смейла. Смейл и Вильямс построили отображение полнотория D в себя, см. рис. 6, со следующими свойствами:

– для всех точек полнотория корректно определены орбиты в направлении вперед;

– эти орбиты притягиваются к множеству $\Lambda \subset D$, которое называется *соленоидом*;

– динамика на соленоиде сходна с отображением подковы Смейла; в частности, имеется чувствительность к начальным условиям и бесконечное количество периодических орбит.

Все эти свойства устойчивы относительно малых возмущений.

Соленоид Смейла – Вильямса дает пример *странного аттрактора*, который резко отличается от притягивающей особой точки или периодической орбиты.

Разные типы аттракторов: совпадают ли они в случае общего положения? Любая диссипативная динамическая система имеет притягивающее множество — *максимальный аттрактор*, — к которому приближаются все орбиты. Но это множество может быть слишком большим: в численных экспериментах наблюдатель видит лишь его небольшую часть, *вблизи которой почти все орбиты проводят почти всё время*. Это множество называется *статистическим аттрактором*. Пример приведен на рис. 7.

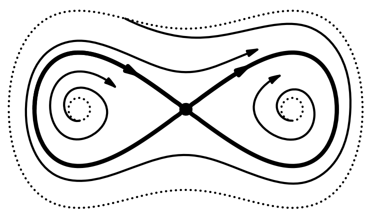

Рис. 7. *Несовпадение максимального и статистического аттракторов*

В этом примере максимальный аттрактор — восьмеркообразная фигура, а статистический — седловая точка. Но этот пример — не общего положения: имеются две седловые связки, которые можно разрушить малыми возмущениями.

Следующая проблема далека от решения: *верно ли, что в случае общего положения максимальный и статистический аттракторы совпадают*? Точнее, *верно ли, что для динамической системы общего положения f статистический аттрактор A становится максимальным, если ограничить f на некоторую окрестность аттрактора A*?

Дальнейшая информация.

По плоским динамическим системам:

А. Андронов, А. Витт, С. Хайкин. *Теория колебаний*. М.: Физматгиз, 1959.

По странным аттракторам и чувствительности к начальным условиям:

D. Ruelle, F. Takens. *On the nature of turbulence* // Commun. Math. Phys., 1971. Vol. 20. P. 167–192.

J. Palis, W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982.

По свойствам динамических систем общего положения и по теории катастроф:

A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge, 1994.

V. Arnold. *Catastrophe theory*. Springer Encyclopaedia in Math., vol. 5, 1994.

По различным типам аттракторов:

J. Milnor. *On the concept of attractor* // Commun. Math. Phys., 1985. Vol. 99, no. 2. P. 177–196.

A. Gorodetski, Yu. Ilyashenko. *Minimal and strange attractors* // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1177–1183.

Ю. С. Ильяшенко, Cornell University, USA; МГУ и НМУ; МИРАН, Москва