Размышления об исследовательских задачах для школьников*

А. Б. Скопенков†

Введение. Эта заметка содержит некоторые соображения об исследовательской работе школьников по математике, а также информацию о конкретном опыте. Здесь говорится о *научно*-исследовательской работе, хотя исследовательские задачи можно использовать также и при *обучении*.

Я привожу ссылки на некоторые удачные работы школьников и рекомендации, как найти задачу для исследования, как подготовить работу и доклад, в каких конференциях школьников участвовать; сформулированы общие *требования* к работам. Естественно, я даже не пытаюсь дать ответ на главный вопрос: как решать задачу [13].

Большинство приводимых соображений не оригинально. Однако опыт автора говорит о необходимости еще раз высказать эти соображения.

Благодарю В. Д. Арнольда, М. Н. Вялого, Н. Н. Константинова, В. М. Тихомирова, Д. В. Трещева и Б. Р. Френкина за полезные обсуждения.

Постановка проблемы. Многим школьникам интересно решать исследовательские задачи, в которых конечный результат может быть даже неизвестен изначально, а естественно появляется в процессе работы. Такой интерес полезно поддерживать и развивать — это одна из форм развития творческих способностей, которая для многих школьников может оказаться наиболее удачной. Кроме того, обычно ученику интереснее изучать теорию в том случае, когда он сразу же применяет ее к конкретным задачам.

Сравнительно недавно стала разрабатываться технология приучения школьников к творческой работе в области математики, когда им даются «исследовательские задачи». Исследовательские задачи полезны для

*Полный обновляемый текст находится по адресу:
`www.mccme.ru/circles/oim/issl.pdf`

†Частично поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Гранты номер 05-01-00993, 07-01-00648а и 06-01-72551-NCNILa, Грантами Президента РФ НШ-4578.2006.1 и МД-4729.2007.1, а также стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года.

творческого развития школьников, для учителей и даже для самой математики.

We should not forget that the solution of any worthwhile problem very rarely comes to us easily and without hard work; it is rather the result of intellectual effort of days or weeks or months. Why should the young mind be willing to make this supreme effort? The explanation is probably the instinctive preference for certain values, that is, the attitude which rates intellectual effort and spriritual achievement higher than material advantage. Such a valuation can be only the result of a long cultural development of environment and public spirit which is difficult to accelerate by governmental aid or even by more intensive training in mathematics. The most effective means may consist of transmitting to the young mind the beauty of intellectual work and the feeling of satisfaction following a great and successful mental effort. (G. Szegö)[1)]

Естественной формой для обсуждения и решения исследовательских задач являются научные конференции школьников[2)]. Их проводится довольно много — от Летней Конференции Турнира Городов[3)] до конференций, на которых иногда награждаются работы, выполненные не самостоятельно, или не проверяются полные тексты доказательств в награждаемых работах. К сожалению, таких конференций немало.

Отсутствие четкой связи между наградой и доступным для проверки результатом (т. е. публикацией) *резко отрицательно* сказывается на прогрессе науки и развращает школьников (даже изначально талантливых

[1)] *Не следует забывать, что решение любой стóящей проблемы очень редко приходит к нам легко и без труда; чаще это результат интеллектуальных усилий, длившихся днями, неделями или месяцами. Что побудит молодой ум делать такие чрезвычайные усилия? Объяснение, вероятно, состоит в инстинктивном предпочтении определенных ценностей, то есть в подходе, при котором интеллектуальное усилие и духовное достижение ставятся выше, чем материальная выгода. Такая оценка может быть лишь результатом долгого культурного развития среды и общественного мнения, — развития, которое трудно ускорить правительственной помощью или даже более интенсивным обучением математике. Может быть, самое эффективное средство состоит в том, чтобы передать молодому уму ощущение красоты интеллектуальной работы и чувство удовлетворения, которое следует за большим и успешным мыслительным усилием.* (Г. Сегё)

[2)] Такие конференции отличаются от научных тем, что предполагают награды и доклады для неспециалистов. Поэтому школьнику, сделавшему научную работу, полезно участвовать не только в научных конференциях по данной тематике, но и в школьных.

[3)] См. `www.mccme.ru/turgor/lktg`. Эти конференции проводятся с 1989 г. под руководством Н. Н. Константинова и (с 2000 г.) С. А. Дориченко (сам я работаю в жюри Летних Конференций с 1997 г.). Ввиду высоких требований к мотивировкам (для жюри) и к доказательствам (для школьников) участники Летних Конференций приобретают солидный опыт в решении исследовательских задач. Некоторым школьникам в процессе работы на Летней Конференции (или продолжая эту работу после) удается получить новые научные результаты, которые докладываются на научных конференциях и публикуются в рецензируемых журналах.

и добросовестных). Многие школьники стараются «получить» *побольше* результатов, а их *проверка и публикация* отходит на второй план. После награждения появляются другие интересные дела (в частности, новые задачи, за решение которых можно получить новые награды). В итоге замечательные идеи часто остаются непроверенными и неопубликованными: трудно взяться за решение проблемы, за которое другим человеком уже получена награда. Если же к такой проблеме через несколько лет все-таки возвращаются, то часто обнаруживаются ошибки. В итоге нередко оказывается, что вклад награжденного автора в решение проблемы *отрицателен*. Поэтому вопрос о *публикации* работ школьников имеет исключительно важное значение.

Как найти задачу для исследования? *Исследовательские задачи должны, с одной стороны, быть доступны для решения, понятны и интересны школьнику, а, с другой стороны, быть математически содержательными.*

Ведь если задача не имеет математического содержания, то усилия школьника по ее решению и проверке доказательства не вполне оправданы. Если же задача интересна школьнику не по своей сути, а благодаря авторитету руководителя или желанию поехать на конференцию, то это обычно приводит к низкому качеству работы: докладчик не в состоянии дать четкие понятные формулировки своих *результатов* и *этапов доказательства*, а также явно отделить одно от другого. Лучшей задачей для исследования является проблема, которая просто и четко формулируется, но трудно решается. (При этом задача может быть уже решенной в науке — тогда школьник должен об этом знать и всегда упоминать при выступлении.)

Желательно, чтобы задачу поставил школьнику человек, имеющий представление о какой-нибудь актуальной области математики, опыт собственной научной работы и вкус к просто формулируемым задачам. Таким человеком может быть как сильный школьный учитель, так и профессиональный математик. Конечно, школьник и сам может придумать себе задачу, однако она не всегда будет иметь серьезное математическое содержание и еще реже — «продолжение».

Вот примеры удачных задач для исследования.

(1) *Доказать, что существует непрерывная функция $f(x,y)$ двух переменных на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, не представимая в виде суперпозиции $\chi(\varphi(x)+\psi(y))$, т. е. функции одного переменного от суммы функции от икс и функции от игрек.*

(2) *Доказать, что через точку внутри трехгранного угла можно провести сечение так, чтобы точка оказалась центром тяжести полученного треугольника.*

Первая задача была поставлена А. Н. Колмогоровым на семинаре для первокурсников. Решение было получено студентом первого курса В. И. Арнольдом и опубликовано в УМН. Вторая задача из репертуара В. М. Тихомирова и давалась школьникам. Обе они имеют «продолжение»: в первом случае — решение тринадцатой проблемы Гильберта [1,18], во втором — кандидатскую диссертацию.

Благодаря красоте и наглядности топологической теории графов она является одним из удачных источников исследовательских задач: см., например, [2,8,9,16–18].

Много хороших задач для исследования можно найти в материалах Летних Конференций Турнира Городов[3)]. Другой естественный способ найти задачу для исследования — работать в кружке-семинаре, на котором предлагаются и обсуждаются задачи для исследования (возможно, наряду с учебной деятельностью). Такой кружок может проводиться в течение учебного года или на летней (зимней, ...) школе.

Например, сам я веду миникурсы по основам топологии в летней школе «Современная Математика» (с 2001 г.) и в Кировской Летней Многопредметной Школе (с 1993 г. с перерывами). Веду кружки «Математический семинар»[4)] в СУНЦ МГУ и «Олимпиады и математика» в МЦНМО (с 2003 г.; основная цель этого кружка — работа с потенциальными участниками Всероссийской математической олимпиады.[5)]).

Задачи для исследования предлагаются также на Московской математической конференции школьников, открывшейся 9.12.2007 [6)] (председатель жюри и программного комитета чл.-корр. РАН Д. В. Трещев). Похожая традиция рассылать школьникам задачи для исследования существовала раньше в «Кванте».

Требования к научной работе.[7)]

Решение проблемы должно быть получено самим школьником, а текст работы — написан им самостоятельно. (*Это не исключает возможность и необходимость консультаций научного руководителя.*)

[4)] С 1994 г.; до 2001 г. совместно с В. Н. Дубровским. Этот кружок продолжает традицию «Физико-математического семинара» и «Научного общества учащихся», которые вели В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, Е. Л. Сурков и А. П. Веселов. См. `www.mccme.ru/circles/oim/matsem.pdf`.

[5)] См. `www.mccme.ru/circles/oim`.

[6)] См. `www.mccme.ru/mmks`

[7)] Эти требования относятся также к студенческим, аспирантским и другим научным работам. По мнению автора, если уж работа школьника называется *научной*, то к ней должны применяться стандартные требования. Другое дело, что *руководство* школьником, при котором он способен сделать научную работу, отличается от руководства студентом.

Текст должен содержать ясные формулировки и полные доказательства результатов, т. е. работа должна быть ориентирована на публикацию в научно-популярном или реферируемом научном журнале.

Это требование необходимо, поскольку в первом приближении польза человечеству от научной работы происходит благодаря появлению проверенного общедоступного текста, т. е. публикации в рецензируемом журнале.[8] См. замечания в конце раздела «Постановка проблемы». Поэтому, как правило, научными премиями *для профессиональных математиков* награждаются только работы, *опубликованные* в рецензируемых журналах. Поскольку серьезное рецензирование и публикация занимают некоторое время (от полугода), этот принцип неприменим к награждению работ *школьников*.

Однако современные технические средства позволяют выдвинуть разумное и реалистичное *промежуточное* условие для награждения школьных работ: *выкладывание работ на сервере* `www.arxiv.org` (с согласия руководителя, с указанием его фамилии и с предложением высылать замечания).[9] Это условие выгодно отличается от простого наличия рекомендаций доведением результата до пользователя, публичностью и ответственностью. Замечу, что создание специальных сайтов для выкладывания *научных* работ школьников представляется излишним.

Чтобы работа соответствовала вышеприведенным требованиям, автор должен иметь хорошую *общематематическую* подготовку. К сожалению, иногда к «научной» работе привлекаются школьники, у которых вызывает трудности даже обязательная программа математической школы. Это приводит к ситуации, когда автор «научной» работы неспособен дать четкие формулировки основного результата и необходимых определений (не

---

[8] Оговорка [4]: Most things that an article such as this one can say have at least one counterexample in the practice of some natural born genius. Authors of articles such as this one know that, but in the first approximation they must ignore it, or nothing would ever get done.

(Большинство утверждений, которые можно высказать в статье вроде этой, имеют хотя бы один контрпример в практике настоящего прирожденного гения. Авторы таких статей это знают, но в первом приближении должны это игнорировать, иначе никогда ничего не получится.)

[9] Хотя выкладывание на `www.arxiv.org` не приравнивается к публикации, оно дает возможность специалистам ознакомиться с результатами автора и прислать замечания. Кроме того, оно предполагает серьезную ответственность автора: помещение некачественной работы (или ее удаление автором, после которого остаются фамилия автора и название работы) негативно влияет на его репутацию. Поэтому выкладывание работ на этом сервере все более популярно среди активно работающих математиков. Для выкладывания работы достаточно рекомендации математика, уже выложившего свою работу; при этом специально оговаривается, что от рекомендателя не требуется проверки рекомендуемой работы. На этот сервер могут быть выложены работы на русском языке (см. инструкции на `www.mccme.ru/mmks`).

говоря уже о доказательстве). Такая ситуация позорна прежде всего для руководителя работы.

Почти во всех работах — и школьных, и «взрослых», — на которые мне приходилось писать отрицательные рецензии, содержалось *несколько* плохо проверенных результатов. По моему мнению, для науки и для авторов было бы полезней, если бы был *один* хорошо проверенный результат.

Пожелание об ориентации работы на публикацию в рецензируемом журнале и требование (необходимое для получения награды) доступности широкому кругу специалистов абсолютно реалистичны для достаточного количества школьников. Действительно, в математических школах или на Летней Конференции Турнира Городов школьники пишут достаточно серьезные математические тексты. Кроме того, каждый год в реферируемых журналах публикуется несколько работ школьников (или начатых авторами во время учебы в школе). Если же указанные требования будут явно высказаны, то количество (и качество) таких работ резко возрастет.

Если работа не удовлетворяет этим критериям, то полезны

(1) доклады школьников по работам, не выложенным на `www.arxiv.org` (это аналоги докладов на научных семинарах, за которые не присуждаются премии; возможно, что в будущем такие работы будут доведены до «премиальных»);

(2) награждение *после* конференции в случае публикации работы.

Решать *учебно-исследовательские* задачи и просто учиться полезно многим школьникам, для которых приведенные требования нереалистичны. Для некоторых именно такой путь в науку наиболее естественен. Полезны поощрительные призы за учебно-исследовательские работы, не претендующие на научную новизну (а также за хорошую учебу).

Как подготовить работу и доклад? Классическими рекомендациями являются статьи [4, 5].

В самом начале работы нужно привести ясные формулировки основных результатов, доступные специалисту по данному разделу математики (например, геометрии и топологии), а также ссылки на литературу, достаточную для понимания формулировок *любым математиком*[10)].

См., например, [3, 7, 10–12, 14, 15, 21, 22].

Это требование необходимо, поскольку:

[10)] Впрочем, согласно известному высказыванию Гильберта (которое подтверждается моим собственным опытом), в случае действительно интересного результата можно прямо в тексте привести сведения, необходимые для понимания формулировок *любым математиком.*

– с *ясной формулировки* основных результатов начинается структуризация (т. е. *ясная формулировка* этапов) доказательства, а без нее нельзя считать, что доказательства проверены самим автором;

– отсутствие *ясной формулировки* затрудняет понимание и использование результатов работы другими математиками (даже работающими в данной области).

Награждение *научными* премиями работ, не удовлетворяющих этим требованиям, способствует:

– понижению стандартов достоверности научных результатов,

– распаду математики на отдельные области, представители которых не понимают друг друга.

Проверка работы специалистами в данной конкретной области должна *предшествовать* представлению работы к публикации/премии и ее рецензированию неспециалистами. Перед докладом на конференции нужно:

– обсудить результаты и проверить доказательства со специалистом по близким проблемам (сначала с научным руководителем, потом с независимым советчиком);

– выступить на научном семинаре;

– разослать текст, содержащий ясную формулировку и полные доказательства специалистам по близким проблемам.

После серьезной проверки работу разумно выложить на `www.arxiv.org`, а после сбора замечаний и соответствующей правки текста — представить к публикации. Затем работа может претендовать на награждение *школьной* (*студенческой*) премией (для научных премий уже необходимо ее *принятие к публикации*).

Еще раз нужно предупредить: размещение на `www.arxiv.org`, публикация или награждение некачественной работы наносит огромный вред репутации ее автора.

В КАКИХ КОНФЕРЕНЦИЯХ ШКОЛЬНИКОВ УЧАСТВОВАТЬ? Конференции-конкурсы высшего уровня в России, с которых проходит отбор на международную конференцию Intel ISEF — *Интел-Юниор* (председатель научного жюри по математике профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова А. В. Михалев) и *Балтийский Конкурс* (председатель научного жюри по математике профессор Санкт-Петербургского государственного педагогического университета В. М. Нежинский).[11] К ним примыкает конференция *Интел-Авангард*[12]: на ней А. Я. Белов ввел *предварительное прослушивание* школьников математиками, на котором высказываются рекомендации по докладам (и по итогам которого

[11] См. `http://junior.mephi.ru`, `http://baltic.contedu.ru`.

[12] См. `www.conference-avangard.ru`

распределяется время докладов).[13] Хочется надеяться, что будет высоким уровень Московской Математической Конференции Школьников[6].

Среди *наград для школьников, подготовивших хорошие доклады*, — гранты, а также приглашения (оплачиваемые органами образования или спонсорами) на Летнюю Конференцию Турнира Городов, в летнюю школу «Современная Математика»[14], на другие конференции школьников.

Примеры исследовательских работ школьников. Некоторыми математиками и учителями накоплен положительный опыт по привлечению сильных школьников к исследовательской работе. Расскажу кратко о своем опыте. Благодаря тому, что в 1991–2003 гг. я был членом жюри Всесоюзной и Всероссийской олимпиады, в 1990–1994 гг. участвовал в подготовке команды СССР и России на Международную олимпиаду, а с 2004 г. являюсь научным руководителем команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду, мне удавалось привлекать к исследовательской работе сильных школьников. В результате некоторые из этих школьников подготовили работы, представляющие научный интерес (ссылки приведены ниже; отдельные работы завершены в студенческие годы). Многие из этих школьников входили в команду России на международную конференцию школьников Intel ISEF в 2000–2007 гг.

Примеры хороших работ школьников: [3, 7, 11, 12, 14, 19–22]; некоторые результаты работ [10, 15] были получены авторами в свои школьные годы.[15] Расскажем подробнее о работах [7, 11].

1. Формулировка критерия Куратовского планарности графов хорошо известна (вместе с необходимыми понятиями она напомнена в [16]). Однако его классическое доказательство сложно и приводится не во всех книгах по теории графов. Более простые доказательства критерия Куратовского содержатся в [23, §5] и [11] (Юрий Макарычев придумал свое доказательство, еще будучи школьником!). В [16] приводится доказательство Макарычева с дальнейшими упрощениями (сделанными А. А. Заславским, В. В. Прасоловым и автором).

2. Число называется *трансцендентным*, если оно не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. В университете или даже в старших классах изучается теоретико-множественное доказательство существования трансцендентных чисел [6, гл. 2, §6]. Отыскание *явных* примеров трансцендентных чисел и доказательство их трансцендентности

[13]Такое предварительное прослушивание проводил М. М. Постников перед семинаром (носящим теперь имя Постникова) мехмата Московского государственного университета.

[14]См. `www.mccme.ru/dubna`

[15]Чтобы не обидеть авторов тех хороших работ, ссылки на которые мне недоступны, я ссылаюсь на работы по единственному формальному критерию, который могу четко соблюсти: на работы своих учеников.

более трудно и не всегда входит даже в программу университетского курса. Первый явный пример трансцендентного числа был приведен Жозефом Лиувиллем в 1835 г. [6, гл. 2, §6]: $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$. В 1929 г. Курт Малер доказал трансцендентность числа $\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$, не вытекающую из общей теоремы Лиувилля, а также из теорем Туэ, Зигеля и Рота [6, гл. 2, §6]. В работе Малера был получен более общий результат; доказательство не элементарно и длинно. Главный результат заметки А. Каибханова и А. Скопенкова [7] — *короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Малера* (основанное на двоичной записи). Видимо, это доказательство является новым.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд. *О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных* // Мат. Просвещение, сер. 2, вып. 3, 1958. С. 41–61.
`http://ilib.mccme.ru/djvu/mp2/mp2-3.htm`

[2] A. Cavicchioli, D. Repovš, A. B. Skopenkov. *Open problems on graphs, arising from geometric topology* // Topol. Appl., 1998. Vol. 84. P. 207–226.

[3] М. Гортинский, О. Скрябин. *Критерий вложимости графов в плоскость вдоль прямой*. Представлено к публикации.

[4] P. R. Halmos. *How to talk Mathematics* // Notices Amer. Math. Soc., 1974. Vol. 21 P. 155–158.

[5] P. R. Halmos. *How to write Mathematics* // L'Enseignement Math., 1970. Vol. 16. P. 123–152. Русск. пер.: П. Р. Халмош. *Как писать математические тексты* // УМН, 1971. Т. 26, вып. 5.
`http://www.ega-math.narod.ru/Halmos.htm`

[6] Р. Курант, Г. Роббинс. *Что такое математика*? М.: МЦНМО, 2001.

[7] А. Каибханов, А. Скопенков. *Примеры трансцендентных чисел* // Мат. Просвещение, сер. 3, вып. 10, 2006. С. 176–184.
`http://www.mccme.ru/free-books/matprosb.html`

[8] В. Курлин, А. Скопенков. *Базисные вложения графов в плоскость* // Мат. Образование, №3, 1997. С. 105–113.

[9] П. Кожевников, А. Скопенков. *Узкие деревья на плоскости* // Мат. Образование, №2–3, 1999. С. 126–131.

[10] V. A. Kurlin. *Basic embeddings into products of graphs* // Topol. Appl., 2000. Vol. 102. P. 113–137.

[11] Yu. Makarychev. *A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion* // J. of Graph Theory, 1997. Vol. 25. P. 129–131.

[12] Н. Однобоков. *Классификация вложения графов в плоскость с непересекающимися образами*. Представлено к публикации.

[13] G. Polya. *How to Solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1945. Рус. перевод: Пойа Д. *Как решать задачу*. М.: Учпедгиз, 1961.

[14] G. Pogudin, P. Verevkin. *On the embeddability of cubic R-graphs into the torus* // Preprint. 2006.

[15] M. Skopenkov. *On approximability by embeddings of cycles in the plane* // Topology and its Applications, 2003. Vol. 134. P. 1–22.

[16] А. Скопенков. *Вокруг критерия Куратовского планарности графов* // Мат. Просвещение, сер. 3, вып. 9, 2005. С. 116–128 и вып. 10, 2006, с. 276–277.
`http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html`
`http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/kuratow.pdf`

[17] А. Скопенков. *Алгебраическая топология с элементарной точки зрения*. М.: МЦНМО. В печати.
`http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/obstruct2.ps`

[18] А. Скопенков. 13-*я проблема Гильберта и базисные вложения*
`http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/hilbert.pdf`

[19] А. Скопенков, А. Таламбуца. *Упаковки правильных многогранников* // Мат. Образование, №3(14), 2000. С. 52–53.

[20] А. Скопенков, А. Таламбуца. *Экстремальные расположения правильных многогранников* // Мат. Просвещение, сер. 3, вып. 8, 2004. С. 53–65.
`http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html`

[21] А. Скопенков и А. Телишев. *И вновь о критерии Куратовского планарности графов* Мат. Просвещение, сер. 3, вып. 11, 2007. С. 159–160.

[22] A. Telishev. *On realizability of graphs on the Klein bottle*. Preprint. 2007.

[23] Thomassen C. *Kuratowski's theorem* // J. Graph. Theory, 1981. Vol. 5. P. 225–242.

А. Б. Скопенков: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Независимый московский Университет, Московский институт открытого образования
Инфо: `http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps`
e-mail: `skopenko@mccme.ru`