

Метрические и ультраметрические пространства сопротивлений

В. А. Гурвич

Данная заметка посвящена формулировке и доказательству следующего факта и его обобщений: сопротивления между полюсами сети удовлетворяют неравенству треугольника

$$\mu(a, b) \leq \mu(a, c) + \mu(c, b). \quad (1)$$

Упоминание физических терминов не должно вводить читателя в заблуждение: речь идет о математическом утверждении. Ниже мы его сформулируем строго и дадим план доказательства.

Изложение построено как цепочка связанных друг с другом упражнений, задач и указаний к ним и следует заметке [2].

1. ЗАКОН ПРОВОДИМОСТИ. Имеется ребро e с концами a и b (проводник). Закон проводимости — это функция f_e , которая напряжению y_e ставит в соответствие ток $y_e^* = f_e(y_e)$.

Здесь мы будем рассматривать только степенной закон проводимости:

$$y_e^* = f_e(y_e) = \lambda_e^s |y_e|^r \operatorname{sign}(y_e) = \frac{|y_e|^r}{\mu_e^s} \operatorname{sign}(y_e). \quad (2)$$

Параметры λ_e и $\mu_e = \lambda_e^{-1}$ называются соответственно проводимостью и сопротивлением ребра e . Параметры r и s мы будем называть показателем и нормировочной степенью закона проводимости. Будем предполагать, что все четыре параметра строго положительны.

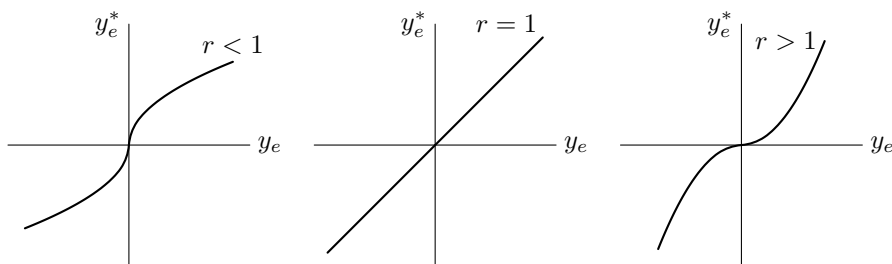


Рис. 1.

Заметим, что при $r = s = 1$ получается обычный закон Ома (ток пропорционален напряжению). Заметим также, что в формуле (2) можно было бы обойтись и без параметра s , но он нам понадобится в дальнейшем.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Проверьте, что функция f_e

- (i) непрерывна и принимает все вещественные значения;
- (ii) строго возрастает: $f_e(y_e) > f_e(y'_e)$ если $y_e > y'_e$,
- (iii) нечетна: $f_e(-y_e) = -f_e(y_e)$; кроме того,
- (iv) обратная функция f_e^{-1} также является степенной;
- (v) найдите параметры r' и s' обратной функции.

2. ОСНОВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. *Схема проводников* — неориентированный связный взвешенный граф $G = (V, E, \mu)$ с множеством вершин V , множеством ребер E и весами (сопротивлениями) ребер μ_e .

Задача расчета схемы — это задача решения некоторой системы уравнений. Переменные в этой системе делятся на четыре группы, по две переменные для каждой вершины и каждого ребра:

- ▷ *потенциалы* вершин x_v ;
- ▷ *токи* на ребрах y_e^* ;
- ▷ *напряжения* на ребрах y_e ;
- ▷ *суммарные токи* в вершинах x_v^* .

Все системы уравнений, которые мы будем рассматривать, включают в себя уравнения, которые линейно выражают напряжения через потенциалы и суммарные токи через токи на ребрах. Для записи этих уравнений нам придется произвольным образом ориентировать рёбра и ввести функцию инцидентности $\text{inc}(v, e)$:

$$\text{inc}(v, e) = \begin{cases} +1, & \text{если вершина } v \text{ является началом ребра } e; \\ -1, & \text{если вершина } v \text{ является концом ребра } e; \\ 0, & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Упомянутые уравнения имеют вид

$$y_e = \sum_{v \in V} \text{inc}(v, e) x_v, \quad (4)$$

$$x_v^* = \sum_{e \in E} \text{inc}(v, e) y_e^*. \quad (5)$$

Заметим, что уравнение (4) для ребра $e = (a, b)$ можно записать проще $y_e = \text{inc}(e, a)x_a + \text{inc}(e, b)x_b$ или еще проще: $y_e = x_a - x_b$ (в последнем случае предполагается, что ребро e ориентировано от a к b).

УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите, что из уравнений (4,5) следует равенство

$$\sum_{v \in V} x_v x_v^* = \sum_{e \in E} y_e y_e^*. \quad (6)$$

3. ДВУХПОЛЮСНЫЕ СХЕМЫ. Зафиксируем две различные вершины $a, b \in V$, которые будем называть *полюсами*. Добавим к уравнениям (4,5) следующие уравнения

$$x_v^* = 0, \quad \text{для } v \in V \setminus \{a, b\}, \quad (7)$$

выражающие первый закон Кирхгофа. Также зафиксируем потенциалы в полюсах

$$x_a = x_a^0, \quad x_b = x_b^0. \quad (8)$$

Зафиксируем параметры r и s . Кроме перечисленных выше линейных уравнений для каждого ребра $e \in E$ запишем закон проводимости (2).

Заметим, что полученная система уравнений обладает тем свойством, что значения потенциалов вершин $x_v, v \in V \setminus \{a, b\}$, однозначно определяют значения всех остальных переменных.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что для любых x_a^0, x_b^0 существует единственное решение системы уравнений (4,5,7,8) и (2) для каждого ребра e .

ПОДСКАЗКА: примените метод последовательных приближений. Подберите такое начальное распределение потенциалов вершин, чтобы потом все потенциалы (нестрого) монотонно возрастали. Докажите, что в любой вершине последовательность потенциалов, во-первых, сходится и, во-вторых, куда нужно (т. е. к решению системы).

Если $x_a \neq x_b$, то в вершинах a и b первый закон Кирхгофа не выполняется.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что $x_a^* + x_b^* = 0$. Более того, если $x_a > x_b$, то все токи из a вытекают (т. е. $y_e^* \text{inc}(a, e) > 0$ для каждого ребра e , инцидентного a), а в b втекают (т. е. $y_e^* \text{inc}(b, e) < 0$ для каждого ребра e , инцидентного b); если $x_a < x_b$, то выполняются противоположные неравенства; если же $x_a = x_b$, то $x_v = x_a = x_b$ и $x_v^* = 0$ для всех $v \in V$, а $y_e = y_e^* = 0$ для всех $e \in E$.

Величина $y(a, b) = x_a - x_b$ называется напряжением, а $y^*(a, b) = x_a^* = -x_b^*$ — током в двухполюсной схеме (G, a, b) .

ЗАДАЧА 3. Докажите, что ток $y^*(a, b)$ и напряжение $y(a, b)$ также связаны степенным законом проводимости с теми же самыми параметрами r и s , т. е.

$$y^*(a, b) = f_{a,b}(y(a, b)) = \lambda(a, b)^s |y(a, b)|^r \text{sign}(y(a, b)) = \frac{|y(a, b)|^r}{\mu(a, b)^s} \text{sign}(y(a, b)). \quad (9)$$

Величины $\lambda(a, b)$ и $\mu(a, b) = \lambda(a, b)^{-1}$ называются соответственно проводимостью и сопротивлением двухполюсной схемы (G, a, b) .

ЗАМЕЧАНИЕ. Задача 3 объясняет, почему мы ограничились степенным законом проводимости. Можно показать (см. [1]), что для любого другого семейства непрерывных функций аналогичное утверждение не выполняется.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Проверьте, что

- (i) $\mu(a, b) = \mu(b, a)$ и
- (ii) $\mu(a, b) > 0$ при $a \neq b$; иными словами, $y^*(a, b) > 0$ при $x_a > x_b$.

По определению положим $\mu(a, b) = 0$ при $a = b$.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Проверьте, что если зафиксировать потенциал x_a в одной вершине $a \in V$ и потребовать выполнения первого закона Кирхгофа в остальных $x_v^* = 0, v \in V \setminus \{a\}$, то $x_v = x_a$ для всех $v \in V, y_e = y_e^* = 0$ для всех $e \in E$ и $x_a^* = 0$.

4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ РЕБЕР. Рассмотрим две простейших двухполюсных схемы, изображенных на рис. 2.

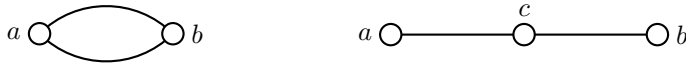


Рис. 2.

ЗАДАЧА 4. Выразите сопротивления этих схем через сопротивления ребер.

5. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА. Зафиксируем теперь не две, а три вершины $a, b, c \in V$.

ЗАДАЧА 5. Докажите неравенство

$$\mu(a, c)^{s/r} + \mu(c, b)^{s/r} \geq \mu(a, b)^{s/r}. \tag{10}$$

Опишем план решения этой задачи. Зафиксируем в двухполюсной сети (G, a, b) потенциалы $x_a = x_a^0$ и $x_b = x_b^0$. Пусть для определенности $x_a^0 \geq x_b^0$. Согласно задаче 1 все остальные потенциалы определены однозначно, в частности, потенциал вершины c принимает некоторое значение x_c^0 .

Рассмотрим еще две двухполюсные схемы: (G, a, c) с потенциалами x_a^0, x_c^0 и (G, c, b) с потенциалами x_c^0, x_b^0 . Будем искать распределения потенциалов в (G, a, c) методом последовательных приближений, а в качестве начального приближения возьмем распределение потенциалов в схеме (G, a, b) .

Заметим, что при этом потенциалы вершин a и c не меняются.

ЗАДАЧА 6. Докажите, что потенциалы остальных вершин монотонно возрастают; в каждой вершине последовательность потенциалов сходится; в результате получается искомое распределение.

ЗАДАЧА 7. Выведите неравенства для токов

$$y^*(a, b) \geq y^*(a, c) \quad \text{и} \quad y^*(a, b) \geq y^*(c, b). \quad (11)$$

ЗАДАЧА 8. Выведите неравенство (10) из (11).

ЗАДАЧА 9. Покажите, что при $s \geq r$ из (10) вытекает неравенство треугольника $\mu(a, c) + \mu(c, b) \geq \mu(a, b)$, а при $s/r \rightarrow \infty$ в пределе получается ультраметрическое неравенство $\max(\mu(a, c), \mu(c, b)) \geq \mu(a, b)$.

6. ЧЕТЫРЕ ПРИМЕРА МЕТРИКИ СОПРОТИВЛЕНИЙ.

6.1. При $r = s = 1$ получаем обычные «электрические» сопротивления. Таким образом, как и было обещано, сопротивления между вершинами графа G образуют метрику.

6.2. Граф $G = (V, E)$ моделирует сеть дорог. Сопротивление μ_e интерпретируется как длина дороги $e \in E$ (или время проезда по ней); а $\mu(a, b)$ — это длина кратчайшего пути из a в b (или минимальное время проезда). В этом случае неравенство треугольника очевидно.

ЗАДАЧА 10. Покажите, что этот случай описывается предельным переходом $r = s \rightarrow 0$ или более общо $s \rightarrow 0, r/s \rightarrow 1$.

6.3. Пусть теперь граф $G = (V, E)$ моделирует трубопровод. Каждое ребро $e \in E$ — это труба, по которой транспортируется жидкость или газ; λ_e интерпретируется как пропускная способность трубы e , т. е. количество жидкости или газа, которое можно пропустить по e в единицу времени, а $\lambda(a, b)$ — это пропускная способность всей двухполосной схемы, т. е. максимальное количество жидкости или газа, которое можно прокачать из a в b за единицу времени.

ЗАДАЧА 11. Покажите, что этот случай описывается предельным переходом $s = 1, r \rightarrow 0$. При этом величины μ удовлетворяют ультраметрическому неравенству. Что означает это неравенство в терминах проводимостей, т. е. максимальных возможных потоков между a и b , b и c , c и a ? (См. [4, теорема 9.1].)

6.4. Пусть теперь граф $G = (V, E)$ моделирует систему рек и каналов, а λ_e обозначает *ширину* e , т. е. максимальный размер (ширину, вес, водоизмещение) корабля, который еще может пройти по e ; при этом $\lambda(a, b)$ — это ширина всей двухполосной схемы, т. е. максимальный размер корабля, который еще может пройти из a в b .

ЗАДАЧА 12. Покажите, что этот случай описывается предельным переходом $s \rightarrow 0$, $r/s \rightarrow 0$. При этом величины μ удовлетворяют ультраметрическому неравенству. Что оно означает в терминах проводимостей?

ЗАМЕЧАНИЕ. В моделях 6.3 и 6.4 предполагается, что вершины никак не ограничивают возможности транспортировки, а в 6.2 они не увеличивают длины пути.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАЧАМ 10–12. Начните со схем, изображенных на рисунке 2, и подберите параметры r и s для этих схем.

7. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ. Обычные электрические сопротивления отвечают случаю $r = s = 1$.

В этом случае можно усилить рассуждение про двухполюсные схемы из п. 3, где было показано, что ток и напряжение между полюсами связаны законом проводимости с теми же параметрами r и s , что и на каждом ребре. Другими словами, двухполюсную схему можно заменить одним ребром.

ЗАМЕЧАНИЕ. Минти [5] показал, что двухполюсную схему можно заменить одним ребром не только для степенного, но и для произвольного монотонного закона проводимости. Точнее говоря, если закон проводимости на каждом ребре e задается монотонно возрастающей функцией f_e , то двухполюсную схему с полюсами a, b можно заменить ребром (a, b) с монотонной функцией проводимости $f_{(a,b)}$.

Теперь рассмотрим k -полюсную схему в линейном случае. Зафиксируем $k \geq 2$ различных полюсов $a_1, \dots, a_k \in V$. Добавим к уравнениям (4,5) первый закон Кирхгофа для вершин, которые не являются полюсами:

$$x_v^* = 0, \quad \text{для } v \in V \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, \quad (12)$$

а в полюсах зафиксируем потенциалы

$$x_{a_i} = x_i^0, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (13)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5. Докажите, что существует единственное решение линейной системы уравнений (2, 4, 5, 12, 13).

Две k -полюсные схемы (G, a_1, \dots, a_k) и (G', a'_1, \dots, a'_k) будем называть *эквивалентными*, если при одинаковых потенциалах в полюсах суммарные токи в полюсах тоже одинаковы, т. е. при условиях $x_{a_i} = x_{a'_i} = x_i^0$ в уравнениях (13) для решений систем уравнений (2, 4, 5, 12, 13) выполнено $x_{a_i}^* = x_{a'_i}^*$ для $1 \leq i \leq k$.

ЗАДАЧА 13. Для каждой k -полюсной схемы с n вершинами существует эквивалентная ей k -полюсная схема с k вершинами.

Эту задачу можно решить, явно указав редукцию $(n + 1)$ -вершинной схемы к n -вершинной, где $n \geq k$.

Занумеруем вершины $(n + 1)$ -вершинной схемы G от 0 до n и обозначим через λ_{ij} проводимость на ребре (i, j) . (Если такого ребра нет, то проводимость равна 0.) Построим n -вершинную схему G' , вершины которой занумерованы от 1 до n , а проводимости заданы формулой

$$\lambda'_{ij} = \lambda_{ij} + \frac{\lambda_{0i}\lambda_{0j}}{\sum_{\ell=1}^n \lambda_{0\ell}}. \quad (14)$$

ЗАДАЧА 14. Докажите, что схемы G и G' эквивалентны.

Опишем план решения этой задачи.

Во-первых, заметим, что в силу линейности при параллельном соединении ребер проводимости складываются. Поэтому достаточно преобразовать $(n + 1)$ -вершинную звезду в эквивалентную n -вершинную схему. Звезда на вершинах $0, 1, \dots, n$ содержит n ребер $(0, i)$.

Во-вторых, поскольку система уравнений линейна, то достаточно рассмотреть базисные наборы потенциалов в вершинах $1, \dots, n$ вида $x_i = 1$, а $x_\ell = 0$ при $\ell \neq i$. Проводимости $\lambda'_{i\ell}$ можно найти, вычислив потенциал в вершине 0. При этом оказывается, что λ'_{ij} получает одно и то же значение для двух базисных наборов: с $x_i = 1$ и с $x_j = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 3$ замена 4-вершинной звезды на треугольник называется Y - Δ преобразованием.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Выведите неравенство треугольника в линейном случае из эквивалентности произвольной 3-полосной схемы некоторой 3-вершинной схеме.

В случае двухполосной схемы из формулы (14) можно получить формулу Кирхгофа для проводимости $\lambda(a, b)$. Для этого введём матрицу Кирхгофа M для n -вершинной схемы: $M_{ij} = \lambda_{ij}$ при $i \neq j$ и $M_{ii} = -\sum_j \lambda_{ij}$. Рассмотрим два минора матрицы Кирхгофа: $\Delta_1(a, b)$ — это определитель матрицы, полученной вычеркиванием строки a и столбца b , а $\Delta_2(a, b)$ — это определитель матрицы, полученной вычеркиванием строк a, b и столбцов a, b .

ЗАДАЧА 15. Выведите из формулы (14) формулу Кирхгофа для проводимостей

$$\lambda(a, b) = \left| \frac{\Delta_1(a, b)}{\Delta_2(a, b)} \right|. \quad (15)$$

БЛАГОДАРНОСТИ. Автор признателен М. Н. Вялому за полезные идеи и улучшение изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. *Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях*. М.: Наука, 1992.
- [2] Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. *Метрические и ультраметрические пространства сопротивлений* // УМН, 1987. Т. 42, вып. 6. С. 187–188.
- [3] Ляшко О. *Почему не уменьшается сопротивление?* // Квант, №1, 1985. С. 10–15.
- [4] Ху Т. *Целочисленное программирование и потоки в сетях*. М.: Мир, 1974.
- [5] Minty G. J. *Monotone networks* // Proceedings of the Royal Society of London, 1960. Ser. A, vol. 257. P. 194–212.