Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского

П. В. Бибиков

Хорошо известно, что на плоскости Лобачевского вокруг треугольника можно описать либо *окружность*, либо *эквидистанту*, либо *орицикл* (эти кривые называются *циклическими линиями*). В этой статье мы докажем критерий, позволяющий определить, какую именно циклическую линию можно описать вокруг данного треугольника.

1. Краткие напоминания

Все рассмотрения мы будем проводить в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости (см. [1]). Напомним, что *плоскостью Лобачевского* называется фиксированная полуплоскость (которую обычно называют *верхней*) относительно некоторой прямой. Эта прямая вместе с бесконечно удаленной точкой называется *абсолютом*. Точки абсолюта называются *бесконечно удаленными*. *Прямыми* в модели Пуанкаре являются полуокружности с центром на абсолюте и вертикальные лучи, перпендикулярные абсолюту (рис. 1). *Угол* между двумя неевклидовыми прямыми по определению полагается равным евклидовому углу между соответствующими кривыми.

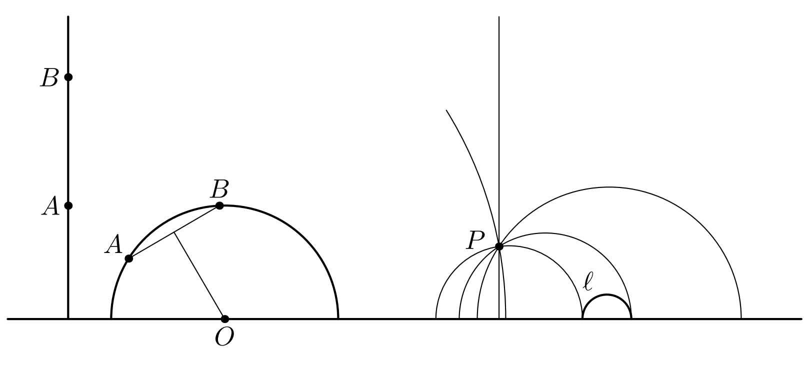


Рис. 1.

Расстояние между точками A и B может быть вычислено по формуле

$$\rho(A, B) = \ln \frac{r' + r}{r' - r},$$

где $r = AB$, $r' = A'B$ и A' — точка, симметричная точке A относительно абсолюта.

В геометрии Лобачевского также можно определить простейшие кривые. Однако, в отличие от евклидовой геометрии, в геометрии Лобачевского элементарные кривые более разнообразны и не ограничиваются одной лишь окружностью.

Упражнение 1. Докажите, что всякая евклидова окружность, целиком лежащая в верхней полуплоскости, является также неевклидовой окружностью, и наоборот, каждая неевклидова окружность является одновременно и евклидовой окружностью.

Итак, если евклидова окружность целиком лежит в верхней полуплоскости, то она является неевклидовой окружностью. Возникает естественный вопрос: *а чем является евклидова окружность, пересекающая абсолют*? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, напомним еще одно определение.

Определение. 1. *Эквидистантой* называется множество точек, расположенных на заданном расстоянии h от данной прямой p и лежащих в заданной полуплоскости относительно этой прямой. Прямая p называется *базой эквидистанты*, величина h — *высотой*, а фиксированная полуплоскость — *полуплоскостью эквидистанты*.

2. *Орициклом* называется кривая, пересекающая все прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку, под прямым углом.

Упражнение 2. Докажите, что евклидова окружность, касающаяся абсолюта, является орициклом, а окружность, пересекающая абсолют в двух точках, — эквидистантой (рис. 2).

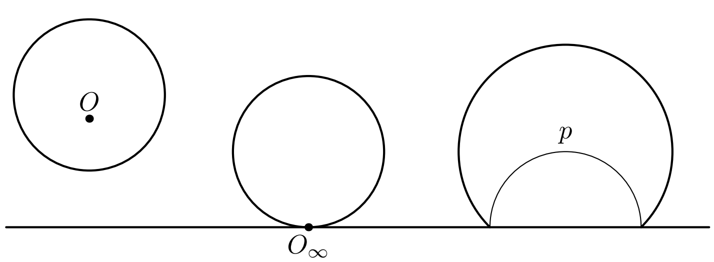


Рис. 2.

Отметим, что наклонные лучи с началом на абсолюте также являются эквидистантами, а прямые, параллельные абсолюту, — орициклами.

Упражнение 3. Докажите это.

Итак, циклические кривые — это в точности те кривые, которые изображаются в модели Пуанкаре дугами окружности. Поскольку в геометрии Евклида вокруг любого треугольника можно описать единственную окружность, получаем следующую теорему для геометрии Лобачевского.

Теорема 1. *Вокруг любого треугольника можно описать либо единственную окружность, либо единственный орицикл, либо единственную эквидистанту* (*рис.* 3).

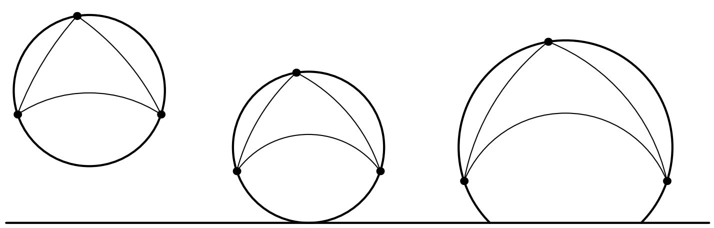


Рис. 3.

В частности, в геометрии Лобачевского существуют треугольники, вокруг которых нельзя описать окружность! (Например, центральный и правый треугольники на рис. 3.)

Упражнение 4. Подумайте, почему в геометрии Лобачевского не проходит евклидово доказательство о существовании описанной окружности треугольника. Как нужно изменить теорему об описанной окружности, чтобы она стала верной в геометрии Лобачевского?

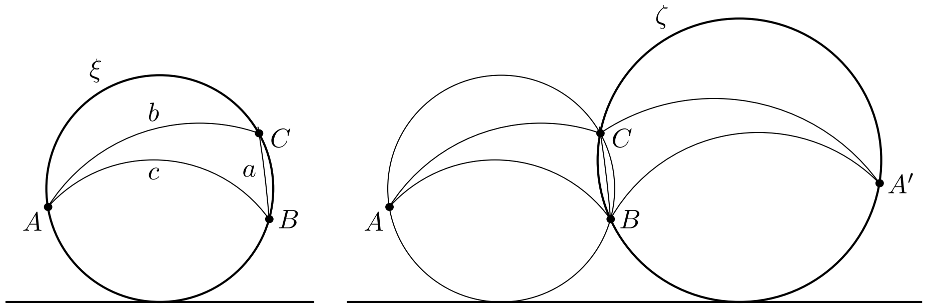
Возникает естественный вопрос: как по элементам треугольника понять, *какую именно* циклическую линию можно описать? В следующем разделе мы дадим ответ на этот вопрос.

2. Критерий формы описанной циклической линии треугольника

Мы начнем наши рассмотрения со случая орицикла.

Пусть вокруг треугольника ABC со сторонами[1] a, b и c описан орицикл ξ (рис. 4а). Поскольку сторона AB имеет наибольшую длину, точка C лежит на дуге $\smile AB$ орицикла ξ. Это означает, что $\smile BC + \smile AC = \smile AB$.

[1] В этом разделе мы считаем, что c — наибольшая сторона в треугольнике.



а) б)

Рис. 4.

Теперь воспользуемся формулой длины дуги орицикла $\smile AB$

$$\smile AB = 2\operatorname{sh}\frac{\rho(A,B)}{2}$$

(см. [3]) и получим необходимое условие для существования описанного орицикла

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}=\operatorname{sh}\frac{c}{2}\,. \tag{1}$$

Оно же является и достаточным. В самом деле, пусть в треугольнике ABC стороны a, b и c удовлетворяют соотношению (1). Рассмотрим орицикл ζ, проходящий через точки B и C (рис. 4б). Длина дуги $\smile BC$, очевидно, равна $2\operatorname{sh}\frac{a}{2}$. Отметим на орицикле ζ точку A', такую, что $A'C = b$ и точка C лежит на дуге $\smile BA'$. Тогда $\smile A'C = 2\operatorname{sh}\frac{b}{2}$, а значит, длина дуги $\smile A'B$ равна $2\operatorname{sh}\frac{a}{2}+2\operatorname{sh}\frac{b}{2} = 2\operatorname{sh}\frac{c}{2}$. Отсюда следует, что $A'B = c$. Итак, мы доказали, что $\triangle ABC = \triangle A'BC$, а значит, описанной циклической линией треугольника ABC является орицикл.

Теперь подумаем, каким будет критерий в случае окружности или эквидистанты. При непрерывном изменении положений вершин треугольника величина $\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}-\operatorname{sh}\frac{c}{2}$ изменяется непрерывно. Отсюда нетрудно вывести, используя (1), что знак этой величины одинаков для всех треугольников, вписанных в окружность, и для всех треугольников, вписанных в эквидистанту. Поэтому достаточно найти знак выражения $\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}-\operatorname{sh}\frac{c}{2}$ для какого-то одного треугольника, вписанного в данную циклическую линию.

Упражнение 5. Проверьте неравенство $\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}-\operatorname{sh}\frac{c}{2} > 0$ для какого-нибудь треугольника, вписанного в окружность.

Упражнение 6. Проверьте неравенство $\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}-\operatorname{sh}\frac{c}{2}<0$ для какого-нибудь треугольника, вписанного в эквидистанту.

Таким образом, окончательный критерий формы описанной циклической линии выглядит следующим образом.

Теорема 2. 1) *Вокруг треугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}>\operatorname{sh}\frac{c}{2}\,.$$

2) *Вокруг треугольника можно описать орицикл тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}=\operatorname{sh}\frac{c}{2}\,.$$

3) *Вокруг треугольника можно описать эквидистанту тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}<\operatorname{sh}\frac{c}{2}\,.$$

3. Вневписанные циклические линии

Помимо описанной окружности, в евклидовой геометрии есть еще несколько замечательных окружностей, связанных с треугольником: вписанная окружность и три вневписанные окружности. Естественный вопрос: *существуют ли эти окружности в геометрии Лобачевского*?

Оказывается, что со вписанной окружностью все в порядке: а именно, в любой неевклидов треугольник можно вписать единственную окружность, центр которой совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.

Упражнение 7. Докажите это утверждение.

А вот с вневписанными окружностями ситуация похожа на ситуацию с описанной окружностью. Например, существуют треугольники, для которых нет *ни одной* вневписанной окружности (попробуйте нарисовать соответствующий пример). Однако верна следующая теорема.

Теорема 3. *У любого треугольника существуют три вневписанные циклические линии, т. е. три циклические линии, касающиеся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон* (*рис.* 5).

Упражнение 8. Докажите эту теорему.

Естественным представляется вопрос о форме вневписанной циклической линии, касающейся фиксированной стороны треугольника. Из теоремы 2 можно очень просто получить критерий, позволяющий определить форму вневписанной циклической линии.

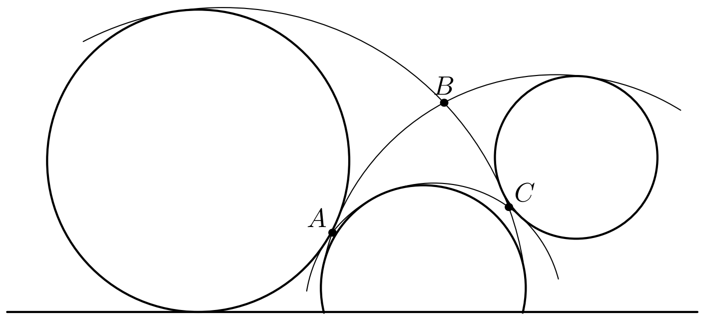


Рис. 5.

Пусть ABC — произвольный треугольник и ω — его вневписанная циклическая линия, касающаяся стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно (рис. 6). Заметим, что ω является описанной циклической линией треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому к нему можно применить теорему 2 и получить искомый критерий. Для этого нужно лишь вычислить длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$.

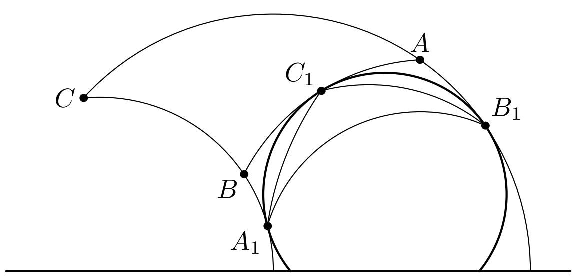


Рис. 6.

Итак, пусть стороны треугольника $A_1B_1C_1$ равны a_1, b_1 и c_1, стороны треугольника ABC равны a, b и c, а углы равны α, β и γ.

Упражнение 9. Применив гиперболическую теорему синусов, докажите следующие равенства:

$$\operatorname{sh}\frac{a_1}{2} = \operatorname{sh}(p-b)\cos\frac{\alpha}{2}\,, \quad \operatorname{sh}\frac{b_1}{2} = \operatorname{sh}(p-a)\cos\frac{\beta}{2}\,, \quad \operatorname{sh}\frac{c_1}{2} = \operatorname{sh}p\sin\frac{\gamma}{2}\,.$$

Значит, форма вневписанной линии определяется знаком выражения

$$\operatorname{sh}(p-b)\cos\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}(p-a)\cos\frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}p\sin\frac{\gamma}{2}\,.$$

Однако этот критерий можно упростить (см. [2, с. 75]).

Упражнение 10. Докажите, что для треугольника с вневписанным орициклом выполняются равенства

$$\frac{\operatorname{sh}(p-b)\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a)\cos\beta/2}{\sin\beta/2} = \frac{\operatorname{sh}p\sin\gamma/2}{\cos\gamma/2} = 1.$$

Поэтому критерий приобретает вид, «двойственный» теореме 2.

Теорема 4. *Пусть ABC — произвольный треугольник, и ω — его вневписанная циклическая линия, касающаяся стороны AB и продолжений сторон CA и CB. Тогда*

1) *ω является окружностью тогда и только тогда, когда*

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} > \cos\frac{\gamma}{2}\,;$$

2) *ω является орициклом тогда и только тогда, когда*

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}\,;$$

3) *ω является эквидистантой тогда и только тогда, когда*

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} < \cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Список литературы

[1] С. Г. Гиндикин. *Рассказы о физиках и математиках.* М.: МЦНМО, НМУ, 2001.

[2] В. В. Прасолов. *Геометрия Лобачевского*. Изд. 3е. М.: МЦНМО, 2004.

[3] А. С. Смогоржевский. *О геометрии Лобачевского.* М.: ГИТТЛ, 1957.

П. В. Бибиков, механико-математический факультет МГУ
e-mail: tsdtp4u@proc.ru