Вписанные четырёхугольники и трапеции в абсолютной геометрии

Ф. В. Петров

Обсуждаются аналоги вписанных четырехугольников и трапеций в абсолютной геометрии.

Следующие известные еще древним грекам теоремы классической (евклидовой) геометрии играют в ней роль, которую нелегко преувеличить:

Теорема о вписанном четырехугольнике. Следующие свойства выпуклого четырехугольника $ABCD$ на плоскости равносильны:
(i) точки A, B, C, D лежат на одной окружности;
(ii) $\angle ABD = \angle ACD$;
(iii) $\angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD = \pi$.

Теорема о трапеции. Следующие свойства выпуклого четырехугольника $ABCD$ на плоскости равносильны:
(i) $BC \parallel AD$;
(ii) $\angle BCA = \angle CAD$;
(iii) $ABC + \angle BAD = \angle BCD + \angle CDA = \pi$.

Доказательства обеих теорем существенно используют пятый постулат Евклида о единственности прямой, параллельной данной, проходящей через данную точку вне прямой. Теорема о трапеции по существу ему равносильна.

Однако оказывается, что эти теоремы можно видоизменить так, чтобы они выполнялись и в абсолютной геометрии (то есть доказать без использования пятого постулата).

Это приятное обстоятельство позволяет перенести многие евклидовы теоремы, использующие вписанные четырехугольники и трапеции, на случай плоскости Лобачевского. Впечатляющие примеры такого рода читатель может найти в статье А. В. Акопяна [1] в этом сборнике.

Автор вполне допускает, что эти теоремы были получены давно, еще до открытия неевклидовой геометрии, в попытках доказать пятый постулат. По крайней мере, для этого были все возможности. Часть теоремы о вписанном четырехугольнике фигурирует в задачнике З. А. Скопеца и В. А. Жарова [3] и в книге В. В. Прасолова и В. М. Тихомирова [2].

Всюду в нашей заметке, если не оговорено противное, речь идет о плоскости в абсолютной геометрии. Напомним, что в абсолютной геометрии верны такие факты, как признаки равенства треугольников, неравенство треугольника, свойство «против большей стороны лежит больший угол», а сумма углов любого треугольника не превосходит π (развернутого угла).

Начнем со следующего определения-теоремы, обобщающего понятие вписанного четырехугольника.

Теорема 1 («Вписанный четырехугольник»). *Следующие свойства выпуклого четырехугольника $ABCD$ равносильны*:

(i) $\angle DBC + \angle BDA = \angle CAD + \angle ACB$;

(ii) $\angle ABD + \angle BDC = \angle BAC + \angle ACD$;

(iii) $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$.

Четырехугольники с такими свойствами будем называть «вписанными».

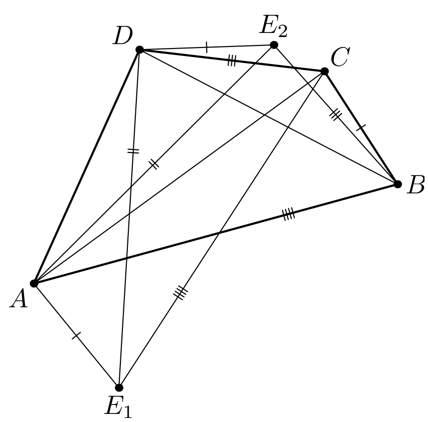

Рис. 1.

Доказательство. Покажем, как, например, из (i) следует (ii) (заметим, что равенство (iii) есть сумма (i) и (ii), так что любые два из трех равенств влекут третье автоматически). Пусть E_1 — точка, симметричная B относительно серединного перпендикуляра к AC, а E_2 — точка, симметричная C относительно серединного перпендикуляра к BD. Тогда равны пары треугольников E_1AC и BCA; E_2DB и CBD. Имеем

$$\angle E_1AD = \angle E_1AC + \angle CAD = \angle ACB + \angle CAD = \angle DBC + \angle BDA = \\ = \angle BDE_2 + \angle BDA = \angle ADE_2,$$

так что треугольники E_1AD и E_2DA равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $E_1D = E_2A$. Далее, треугольники E_1CD и ABE_2 равны по трем сторонам, так что

$$\angle ABD + \angle BDC = \angle ABD + \angle DBE_2 = \angle ABE_2 = \angle E_1CD = \\ = \angle E_1CA + \angle ACD = \angle BAC + \angle ACD,$$

что и требовалось доказать.

Вывод (i) и (ii) из (iii) аналогичен: надо рассмотреть точки, симметричные C и B относительно серединных перпендикуляров к AB и CD соответственно.

Заметим, что если четырехугольник $ABCD$ действительно вписан в окружность с центром O, то он удовлетворяет этим равенствам. В самом деле, если, для определенности, O лежит внутри $ABCD$, то каждая из сумм $\angle ABC + \angle ADC$ и $\angle BAD + \angle BCD$ равна сумме углов при основаниях равнобедренных треугольников AOB, BOC, COD, DOA. К сожалению, обратное неверно: существуют вписанные четырехугольники, не вписанные, однако, ни в какую окружность. Это связано с тем, что не любой треугольник имеет описанную окружность (серединные перпендикуляры к сторонам не обязаны пересекаться). Отметим, что на плоскости Лобачевского есть и другие кривые, помимо окружностей, для которых вписанные в них четырехугольники удовлетворяют требованиям теоремы. Читатель, хорошо знакомый с геометрией Лобачевского, догадался, что речь об *эквидистантах*. Напомним, что эквидистанта задается прямой l, полуплоскостью с границей l и расстоянием d как геометрическое место точек в полуплоскости, расстояние от которых до l равно d. Несложно видеть, что вписанный в эквидистанту четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет например (iii). Доказательство такое же, как для вписанного в окружность четырехугольника, только роль равнобедренных треугольников с вершиной в центр окружности играют равнобедренные четырехугольники Саккери ABH_bH_a и т. д. (H_a, H_b — проекции A, B на l).

Прояснить сходство между окружностями и эквидистантами проще всего, рассмотрев модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, например, в полуплоскости. Тогда окружности будут выглядеть как евклидовы окружности, не пересекающие абсолют, а эквидистанты — как евклидовы окружности, пересекающие абсолют в двух точках. Любой «вписанный четырехугольник» вписан либо в окружность, либо в эквидистанту, либо в орицикл — окружность, касающуюся абсолюта (здесь мы называем евклидовыми окружностями все евклидовы окружности и прямые, не перпендикулярные абсолюту).

Обозначим через $\sphericalangle XYZ$ величину $\angle XYZ - \angle YXZ - \angle YZX$.

Заметим, что теорему 1 можно переформулировать как равносильность равенств $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ABC = -\sphericalangle ADC$

и т. д. Если для фиксированной пары точек X, Z считать, что $\sphericalangle XYZ = \angle XYZ - \angle YXZ - \angle YZX$ для Y по одну сторону от XZ и $\sphericalangle XYZ = -\angle XYZ + \angle YXZ + \angle YZX$ по другую сторону, то «окружностью» (то есть окружностью или эквидистантой), проходящей через точки A и B, будет геометрическое место точек Z таких, что $\sphericalangle AZB = \mathrm{const}$.

Упражнение.. Докажите, что треугольник ABC определяется значениями $AB, AC, \sphericalangle BAC$ однозначно с точностью до равенства.

Перейдем к обобщению теоремы о трапеции.

Теорема 2 («Трапеция»). *Следующие свойства выпуклого четырехугольника $ABCD$ равносильны*:

(i) $\angle BAD + \angle ABC = \angle BCD + \angle ADC$;

(ii) $\angle CBD + \angle CAD = \angle BCA + \angle BDA.$

Такие четырехугольники будем называть «трапециями» с основаниями BC и AD.

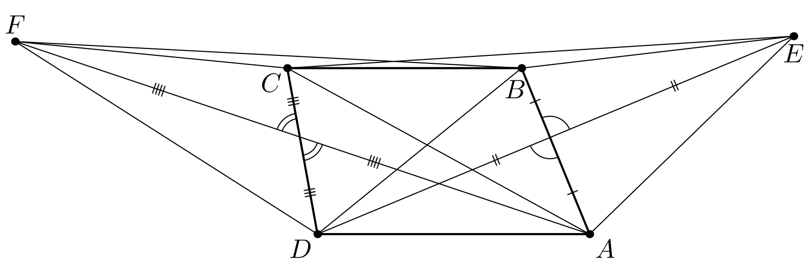

Рис. 2.

Доказательство. Выведем (ii), предполагая (i). Пусть точка E симметрична точке D относительно середины AB, точка F симметрична A относительно середины CD. Равны пары треугольников ABE и BAD; CDA и DCF. Далее, по двум сторонам и углу равны треугольники EBC и FCB ($\angle EBC = \angle EBA + \angle ABC = \angle BAD + \angle ABC = \angle BCD + \angle ADC = \angle BCD + \angle DCF = \angle BCF$. Вообще говоря, первое равенство верно только если $\angle BAD + \angle ABC \leqslant \pi$. Это так: $\angle BAD + \angle ABC$ есть полусумма углов четырехугольника $ABCD$, которая в абсолютной геометрии не превосходит 2π). Значит, $EC = BF$ и по трем сторонам равны треугольники EAC и FDB, так что $\angle BAC + \angle ADB = \angle EAC = \angle FDB = \angle CDB + \angle ACD$. Вычитая это из (i) получаем (ii).

Для вывода (i) из (ii) надо рассмотреть точки, симметричные D относительно середины AC и A относительно середины BD и провести аналогичное вычисление. Предоставим это читателю.

Отметим, что в условиях теоремы треугольники ABD и ACD равновелики. Это можно понимать в том смысле, что равны суммы их углов (на плоскости Лобачевского площадь треугольника пропорциональна величине $\pi -$ (сумма его углов)), а евклидов случай рассматривать отдельно. Но можно понимать это более единообразным и при том элементарным способом: мы доказали, что эти треугольники *равнодополняемы*, то есть дополняются равными треугольниками до многоугольников, которые в свою очередь разбиваются на равные треугольники (именно, невыпуклый шестиугольник $AEBCOD$ разбивается на два треугольника, равных ABD, и треугольник BCO, а с другой стороны — на треугольники EBC, AEC, AOD. Аналогичные два разбиения есть и для шестиугольника $BCFDAO$.) На плоскости Лобачевского выполнена теорема Больяи – Гервина о том, что равновеликие многоугольники всегда равнодополняемы и даже равносоставлены (могут быть разбиты на соответственно равные треугольники) [4], так что вообще говоря и другие теоремы о равновеликости должно быть можно доказывать, не прибегая к понятиям анализа.

Сформулируем также отдельно следующее следствие теоремы 2:

Лемма 3. *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является трапецией с основаниями BC и AD (то есть $\angle A+\angle B = \angle C+\angle D$) если и только если треугольники ABD и ACD равновелики.*

Доказательство. Уже доказано, что в трапеции такие треугольники равновелики. Докажем, что если они равновелики, то $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$. Предположим, что, например, $\angle A + \angle B > \angle C + \angle D$. Пусть точка X движется по стороне CD от C к D. Заметим, что разность $\angle ABX + \angle BAD - \angle BXD - \angle XDA$ меняется непрерывно, причем при $X = C$ она отрицательна, а при X рядом с D — положительна (если X близко к D, то $\angle BXD$ стремится к $\pi - \angle BDC > \pi - \angle CDA$, так что $\angle BXD + {}+\angle XDA > \pi \geqslant (\angle ABX+\angle BAD+\angle BXD+\angle XDA)/2$, так как сумма углов четырехугольника не превосходит 2π). Значит, найдется такое положение точки X на отрезке CD, для которого упомянутая разность равна нулю и $ABXD$ — трапеция. Но тогда получится, что равновелики треугольники ACD, ABD и AXD, что невозможно.

Благодарность

Автор благодарен Арсению Акопяну за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] А. В. Акопян. *О некоторых классических конструкциях в геометрии Лобачевского* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 13, 2009. С. 155–170.

[2] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. *Геометрия.* М.: МЦНМО, 1998.

[3] З. А. Скопец, В. А. Жаров. *Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия.* Учпедгиз, 1962.

[4] R. Hartshorne. *Geometry*: *Euclid and Beyond*. Springer, 2000.

Ф. В. Петров, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН