О некоторых классических конструкциях в геометрии Лобачевского

А. В. Акопян*

В статье пойдет речь об аналогах классических конструкций евклидовой геометрии в геометрии Лобачевского. Мы покажем, что в абсолютной геометрии выполнены такие теоремы как теорема о трёх колпаках, пересечения общих хорд трёх окружностей. Будет приведен аналог прямой и окружности Эйлера треугольника, а также доказана знаменитая теорема Фейербаха.

1. Введение

В последнее десятилетие существенно возрос интерес к так называемой классической геометрии. Было получено много новых и интересных теорем, а также написано множество книжек и статей. Однако, практически никак не исследованы даже самые элементарные (по нынешним меркам) конструкции в геометрии Лобачевского и в сферической геометрии.

В данной статье мы сформулируем несколько аналогов классических теорем евклидовой геометрии. Основным результатом является аналог теоремы Фейербаха о касании вписанной окружности и окружности девяти точек Эйлера (напомним, что эта окружность проходит через середины сторон, точки падения высот, а также через середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром треугольника).

Формулировку аналога этой теоремы мы дадим в следующем разделе. В разделе 3 мы объясняем смысл этой аналогии. В разделе 4 мы докажем существование окружности Эйлера. Далее в разделе 5 будут построены аналоги понятий степени точки, инверсии и гомотетии, с помощью которых будет доказано существование прямой Эйлера в разделе 6. В разделе 7 мы докажем теорему Фейербаха, а в разделе 8 — теорему о «трёх колпаках» и с помощью неё докажем одно интересное свойство точек Фейербаха.

*Работа была проделана при поддержке РФФИ, грантов №06–01–00648 и №08-01-00565-а, а также Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

Сразу отметим, что в дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться тем, что любые две прямые пересекаются и всегда существует окружность, проходящая через любые три точки. В геометрии Лобачевского это, вообще говоря, неверно. Прямые могут расходиться, а окружности могут вырождаться в орициклы или эквидистанты (которые можно считать окружностями с центрами на абсолюте и за [1]). Рассмотрение «расходящихся» случаев только усложнит доказательство, хотя не будет содержать никаких принципиально новых идей. Для придания полноты рассуждениям мы всегда можем сказать, что данная теорема следует из теоремы об аналитическом продолжении, поскольку рассмотренные нами случаи достаточно обширны (содержат внутреннюю точку в конфигурационном пространстве).

Действительно, геометрию Лобачевского можно пополнить псевдоточками и поставить им в соответствие пучки прямых (прямых, перпендикулярных некоторой одной прямой). В модели Клейна это прямые, проходящие через одну точку, а в модели Пуанкаре окружности, содержащие эти прямые, должны принадлежать одному пучку. Поэтому утверждения, сформулированные на языке «точки лежат на одной прямой» и «прямые пересекаются в одной точке», в модели Пуанкаре можно перевести на язык «пучки содержат общий элемент» (уравнения задающие их линейно зависимы) или «прямые принадлежат одному пучку». Окружностями можно считать множество пучков (то есть «точек»), образующихся при симметриях относительно прямых из другого пучка («центра» окружности). Так различные утверждения можно записывать на аналитическом языке и смотреть на область, в которой выполняются требуемые равенства, указывающие, например, на совпадение некоторых точек. Поскольку все встречающиеся функции будут аналитическими, то обращение в ноль на области, размерность которой совпадает с размерностью конфигурационного пространства, означает тождественное обращение в ноль.

Тем не менее, по ходу рассуждений мы будем стараться обойтись «малой кровью» и показывать, как можно полностью разобрать утверждения, не прибегая к столь мощным инструментам.

2. Формулировка

В 1822 году Карл Вильгельм Фейербах обнаружил, что окружность девяти точек Эйлера касается вписанной и трёх вневписанных окружностей треугольника. Эта теорема теперь называется теоремой Фейербаха. У неё есть множество интересных и достаточно разных доказательств.

[1] Подробнее об этом вы можете прочесть в статьях Ф. В. Петрова [7] и П. В. Бибикова [3] в этом сборнике.

Например, она сразу следует из обращения теоремы Кэзи (обобщения теоремы Птолемея). Другое доказательство можно получить, проделав инверсию с центром в середине одной из сторон треугольника.

Не такое простое, но элементарное и очень содержательное, доказательство этой теоремы было получено Владимиром Протасовым в [10], где он показал, что теорема Фейербаха является частным случаем так называемой *«теоремы о сегменте»*.

У теоремы Фейербаха есть много интересных обобщений, см., например, [5] или [6].

В 2008 г. П. В. Бибиков сформулировал гипотезу, которая является обобщением теоремы Фейербаха на случай геометрии Лобачевского.

Гипотеза (Павел Бибиков). *Обозначим через M_a, M_b и M_c основания биссекторов (чевиан, делящих площадь треугольника пополам) треугольника ABC в геометрии Лобачевского. Тогда окружность, проходящая через точки M_a, M_b и M_c, касается вписанной и трёх вневписанных окружностей треугольника ABC.*

Назовем эту окружность *окружностью Эйлера* треугольника ABC.

Мы докажем эту гипотезу. Кроме того, будет показано существование прямой, на которой лежат центр описанной окружности треугольника, точка пересечения биссекторов, центр окружности Эйлера, а также точка пересечения чевиан, соединяющих вершины треугольника с повторными точками пересечения окружности Эйлера со сторонами. По мнению автора, этой прямой вполне подходит название прямой Эйлера.

3. Псевдомедианы и псевдовысоты

Прежде чем говорить о теореме Фейербаха, следует разобраться, через какие шесть точек на сторонах треугольника проходит окружность Эйлера.

Биссекционные отрезки, как и медианы в евклидовой плоскости, делят площадь треугольника пополам. В геометрии Лобачевского это означает, что равны суммы углов двух треугольников, на которые биссектор делит исходный треугольник. После этого естественно сформулировать какое-нибудь угловое определение высот евклидового треугольника и перенести это определение на случай геометрии Лобачевского.

Пусть H_a — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Тогда в евклидовом случае будет выполнено следующее равенство:

$$\angle AH_aB - (\angle H_aAB + \angle ABH_a) = \angle AH_aC - (\angle H_aAC + \angle ACH_a) \\ \left(= \frac{1}{2}(\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)) = 0\right). \tag{1}$$

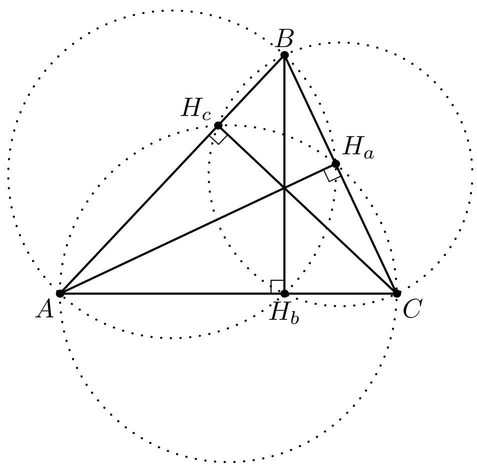

Рис. 1.

Назовем *псевдовысотами* чевианы с аналогичным свойством в геометрии Лобачевского. Убедимся в существовании псевдовысот.

Обозначим через $\sphericalangle XYZ$ величину $\angle XYZ - \angle ZXY - \angle YZX$, где углы берутся со знаком: $\angle XYZ > 0$ тогда и только тогда, когда поворот по кратчайшей дуге от X к Z вокруг Y происходит против часовой стрелки.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором вершины A, B, C идут по часовой стрелке. Используя указанное выше правило знаков для углов, можно проверить, что при движении точки X на прямой BC в направлении от B к C величина $\sphericalangle BXA$ непрерывно уменьшается, а величина $\sphericalangle AXC$ непрерывно увеличивается, причем $\sphericalangle BXA - \sphericalangle AXC > 0$ для достаточно далеких точек X на луче CB и $\sphericalangle BXA - \sphericalangle AXC < 0$ для достаточно далеких точек X на луче B. Поэтому найдется такая точка H_a, для которой $\sphericalangle BXA = \sphericalangle AXC$. Это и есть основание псевдовысоты на прямой BC.

Обозначим через H_b и H_c основания псевдовысот на прямых CA и AB соответственно. Для них будут выполняться равенства $\sphericalangle CH_bB = \sphericalangle BH_bA$ и $\sphericalangle AH_cC = CH_cB$.

В следующем разделе мы покажем, что через эти три точки проходит окружность Эйлера.

Заметим, что

$$\sphericalangle BH_aA + \sphericalangle AH_aC = \sphericalangle CH_bB + \sphericalangle BH_bA = \sphericalangle AH_cC + \sphericalangle CH_cB = S_{\triangle ABC}\,,$$

откуда получаем

$$\sphericalangle BH_aA = \sphericalangle AH_aC = \sphericalangle CH_bB = \sphericalangle BH_bA = \sphericalangle AH_cC = \sphericalangle CH_cB = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\,.$$

Несложно доказать в абсолютной геометрии, что четырехугольники ABH_aH_b, ACH_aH_c и BCH_bH_c являются вписанными (правильное определение вписанного четырехугольника см. в статье Ф. В. Петрова [7] в этом выпуске). Для этого воспользуемся аналогом теоремы о вписанном угле. Эта теорема есть во многих книжках (см. например [12], или [11], или упомянутую статью [7]), тем не менее, мы здесь напомним её доказательство.

Лемма 4. *Для любой точки X на дуге AB некоторой фиксированной окружности, величина $\sphericalangle AXB$ постоянна.*

Доказательство. Пусть O — центр этой окружности, а X — произвольная точки на дуге AB. Легко видеть, что O лежит на серединном перпендикуляре к AB, а кроме того выполнено равенство

$$\measuredangle OAB = \frac{1}{2}(\measuredangle AXB - \measuredangle BAX - \measuredangle XBA) = \frac{1}{2}\sphericalangle AXB. \qquad (2)$$

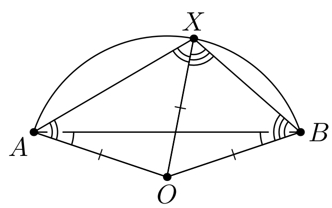

Рис. 2.

То есть величина $\sphericalangle AXB$ не зависит от того, какую точку X на дуге мы берем, и всегда равна $2\measuredangle OAB$.

Можно показать и обратное, что если $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AYB$, то четыре точки A, B, X и Y лежат на одной окружности в модели Пуанкаре, т. е. на *циклической линии* — окружности, эквидистанте или орицикле.

В дальнейшем нам пригодится еще такое следствие теоремы о вписанном угле:

Лемма 5. *Существует единственная тройка точек X_a, X_b и X_c на сторонах треугольника ABC, что четырехугольники ABX_aX_b, ACX_cX_a и BCX_cX_b вписанные.*

Доказательство. Действительно, из теоремы о вписанном угле получаем

$$\begin{aligned}\sphericalangle BX_aA = \sphericalangle BX_bA = S_{\triangle ABC} - \sphericalangle CX_bB = S_{\triangle ABC} - \sphericalangle CX_cB = \\ = \sphericalangle AX_cC = \sphericalangle AX_aC = S_{\triangle ABC} - \sphericalangle BX_aA\,.\end{aligned} \qquad (3)$$

То есть $\sphericalangle BX_aA = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \sphericalangle BH_aA$. Значит, точки H_a и X_a совпадают. Аналогично рассуждаем для двух других точек.

4. Параллельность и антипараллельность

Напомним, что для евклидового угла XOY можно определить понятие антипараллельности. Пусть на прямой OX заданы точки A и B, а на прямой OY точки C и D, и пусть четырехугольник $ABCD$ будет вписанным. В этом случае мы назовем отрезки AD и BC антипараллельными. В евклидовой геометрии имеется простой критерий вписанности четырехугольника, а именно сумма противоположных углов должна равняться π. Поэтому легко понять, что если два отрезка $A'D'$ и $B'C'$ параллельны двум антипараллельным отрезкам AD и BC соответственно, то они также будут антипараллельны между собой.

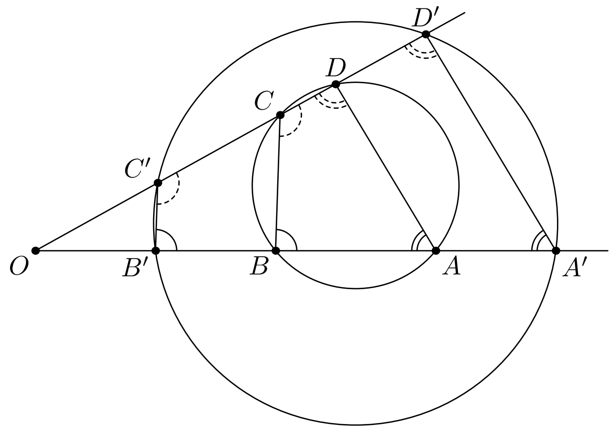

Рис. 3.

Перенесем это понятие на случай плоскости Лобачевского. Так же, как и в евклидовом случае, назовем отрезки AD и BC антипараллельными, если четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Аналогично евклидовому случаю, можно воспользоваться критерием вписанности и получить, что отрезки антипараллельны тогда и только тогда, когда $\angle DAO - \angle ODA = \angle OCB - \angle CBO$, что равносильно $\sphericalangle DAO = \sphericalangle OCB$.

Теперь уже можно ввести понятие параллельности отрезков относительно угла. Отрезки BC и AD параллельны, если

$$\angle DAO - \angle ODA = \angle CBO - \angle OCB, \text{ что равносильно } \sphericalangle DAO = -\sphericalangle OCB. \tag{4}$$

Понятно, что любые два отрезка, антипараллельные некоторому отрезку, будут параллельны между собой.

Заметим, что в статье Ф. В. Петрова [7] четырехугольники $ABCD$ с параллельными отрезками AD и BC называются

Лемма 6 ([7, лемма 3]). *Площади треугольников ABC и ABD равны тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие на сумму углов четырехугольника $ABCD$:*

$$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C. \tag{5}$$

Из этой леммы мы получаем, что если M_a и M_b — основания биссекционных отрезков, то отрезки M_aM_b и AB параллельны относительно угла ACB. Поскольку же H_aH_b антипараллелен AB относительно того же угла, то H_aH_b антипараллелен M_aM_b.

Теперь легко доказать, что H_a, H_b и H_c являются повторными точками пересечения окружности $M_aM_bM_c$ со сторонами треугольника. Действительно, обозначим повторные точки пересечения со сторонами за X_a, X_b и X_c. Тогда X_aX_b будет антипараллелен M_aM_b, а значит антипараллелен и AB, т. е. четырехугольник X_aX_bAB будет вписанным. Аналогичное вписанными будут и четырехугольники ACX_aX_c и BCX_bX_c. Но по лемме 5 такая тройка точек X_a, X_b, X_c единственна и это тройка H_a, H_b и H_c.

В модели Пуанкаре можно указать на естественную связь между параллельностью и антипараллельностью. Последняя, как мы помним, соответствует случаю вписанного четырехугольника. Существует теорема Лекселя, доказательство которой можно найти например в [13].

Теорема 7 (теорема Лекселя в геометрии Лобачевского). *Пусть точки A^* и B^* инверсны точкам A и B относительно окружности абсолюта модели Пуанкаре. Пусть ω — некоторая евклидова окружность, проходящая через точки A^* и B^*. Тогда для любой точки X, лежащей на окружности ω, площадь треугольника XAB (в смысле геометрии Лобачевского) будет постоянной, т. е. не будет зависеть от точки X.*

Из этой теоремы и леммы 6 следует, что если отрезки AB и DC параллельны, то точки A^*, B^*, C, D лежат на одной окружности в плоскости модели Пуанкаре.

Заметим также, что лемму 6 можно вывести из теоремы 7.

5. Степень точки, гомотетия и инверсия

Сопоставим каждому отрезку AB его *псевдодлину* $d_E(A, B)$ следующим образом. Поместим точку A в центр диска Пуанкаре (радиус диска подразумевается равным 1), тогда $d_E(A, B)$ определим как евклидову длину отрезка AB.

Нетрудно проверить, что псевдодлина не зависит от выбора движения, переводящего точку A в центр диска Пуанкаре. Кроме того, псевдодлина симметрична: $d_E(A, B) = d_E(B, A)$.

С помощью псевдодлины можно определить понятия степени точки относительно окружности, гомотетии и инверсии. Так, *степенью точки* A относительно окружности ω назовем произведение псевдодлин отрезков, соединяющих AB и AC, где BC — хорда окружности ω, проходящая через A. Корректность этого определения (то есть независимость величины $d_E(A, B) \cdot d_E(A, C)$ от выбора прямой, проходящей через A) становится очевидной после переноса точки A в центр модели Пуанкаре, в этом случае теорема становится просто евклидовой.

Теперь можно определить радикальную ось двух окружностей как множество точек, у которых степени относительно двух данных окружностей равны.

Лемма 8. *Радикальная ось является прямой.*

Это очевидно для двух пересекающихся окружностей (у них есть общая хорда). Для непересекающихся окружностей можно, например, выйти в пространство, надстроив над окружностями пересекающиеся сферы (радикальной осью которых будет плоскость, проходящая через их пересечение). Подробнее об этой конструкции см. [1].

Отметим, что теперь можно переносить из евклидовой геометрии теоремы, доказательство которых использует радикальные оси. Например, так можно доказать теорему Брианшона для окружности в геометрии Лобачевского (см. доказательство теоремы Брианшона с помощью радикальных осей в [1] или [9]).

Из леммы 8 сразу следует, что псевдовысоты пересекаются в одной точке — радикальном центре окружностей ABH_aH_b, ACH_aH_c и BCH_bH_c.

Аналогично, точка пересечения биссекторов будет радикальным центром окружностей $A^*B^*M_aM_b$, $A^*C^*M_aM_c$ и $B^*C^*M_bM_c$ (поскольку все прямые, проходящие через A^*, проходят и через A, то прямая A^*M_a будет ничем иным как биссектором AM_a).

Определим теперь *гомотетию с центром в точке A и коэффициентом k* как преобразование, переводящее точку P в точку P', лежащую на луче AP (в случае положительного k) и такую, что $d_E(A, P') = k \cdot d_E(A, P)$.

Аналогично определим *инверсию с центром точке A и радиусом r* как преобразование, переводящее точку P в точку P', лежащую на луче AP и такую, что $d_E(A, P') \cdot d_E(A, P) = r^2$.

Легко видеть, что эти преобразования переводят окружности модели Пуанкаре в окружности, а прямые, проходящие через центр, — в прямые.

6. Прямая Эйлера

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC, через E — центр окружности Эйлера, через M и H — точки пересечения биссекторов и псевдовысот соответственно. Покажем, что эти точки лежат на одной прямой, которую мы и будем называть *прямой Эйлера*.

Поместим точку M в центр модели Пуанкаре. Тогда из критерия вписанности для гиперболических и евклидовых четырехугольников следует, что (евклидовы) прямые AB и M_aM_b будут параллельны в евклидовом смысле. Следовательно, верны следующие равенства:

$$\frac{d_E(M, M_a)}{d_E(M, A)} = \frac{d_E(M, M_b)}{d_E(M, B)} = \frac{d_E(M, M_c)}{d_E(M, C)}\,. \tag{6}$$

То есть описанная окружность треугольника ABC переходит в окружность Эйлера при гиперболической гомотетии с центром в M и коэффициентом $-\dfrac{d_E(M, M_a)}{d_E(M, A)}$. Конечно, центр описанной окружности при этом не должен переходить в точку E (т. е. центр образа окружности), но, тем не менее, он обязан лежать на прямой ME. Кроме того, он должен лежать и на прямой MO. Получаем, что эти две прямые совпадают и точки O, E и M лежат на одной прямой.

Аналогично рассуждаем для точки H. Поскольку H является радикальным центром окружностей ABH_aH_b, ACH_aH_c и BCH_bH_c выполнено соотношение

$$d_E(H, H_a) \cdot d_E(H, A) = d_E(H, H_b) \cdot d_E(H, B) = d_E(H, H_c) \cdot d_E(H, C)\,. \tag{7}$$

То есть окружность Эйлера является образом описанной окружности треугольника ABC после композиции поворота вокруг точки H на угол π и инверсии с центром в H и квадратом радиуса $d_E(H, H_a) \cdot d_E(H, A)$. Отсюда видно, что H также лежит на прямой OE.

Приведенное рассуждение аналогично доказательству существования прямой Эйлера в евклидовой геометрии. Поэтому, по мнению автора, эта прямая может считаться аналогом прямой Эйлера в геометрии Лобачевского.

7. Теорема Фейербаха

Теперь сформулируем теорему о сегменте (см. [10]), которая будет главным инструментом при доказательстве теоремы Фейербаха.

Теорема 9 (Теорема о сегменте, Протасов [10]). *Пусть даны две прямые a и b и окружность ω, касающаяся их обеих, а также некоторое фиксированное число φ. Каждой касательной l к ω поставим в соответствие окружность ω_l следующим образом. Пусть прямая l пересекает прямые a и b в точках A и B соответственно, тогда ω_l — это такая окружность, проходящая через точки A и B, что величина дуги AB в ней равна φ. Тогда окружность ω_l касается двух фиксированных окружностей, каждая из которых в свою очередь касается прямых a и b.*

Посмотрим на теорему Фейербаха в модели Пуанкаре с евклидовой точки зрения. Забудем про основания биссекторов, они нам не понадобятся, и будем рассматривать только псевдовысоты AA', BB', CC' треугольника ABC. Увидим мы следующую теорему:

Теорема 10. *Пусть даны два такие треугольника ABC и $A'B'C'$, что четырехугольники $ABA'B'$, $ACA'C'$ и $BCB'C'$ — вписанные. Тогда существует четыре окружности, касающиеся окружностей, описанных около треугольников ABC', $AB'C$, $A'BC$ и $A'B'C'$.*

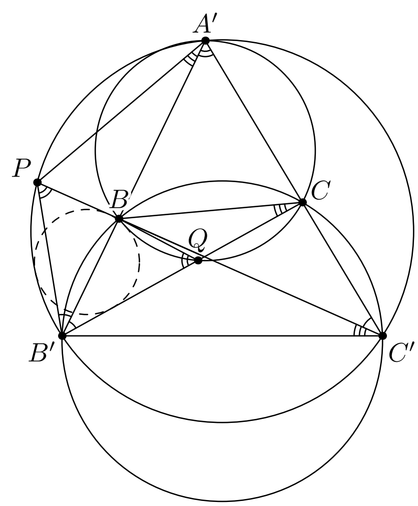

Рис. 4.

Доказательство. Сделаем инверсию с центром в точке A. Тогда окружности ABC' и $AB'C$ перейдут в прямые, остальные же окружности останутся окружностями. Таким образом, две из этих четырех окружностей можно считать прямыми.

Итак, пусть имеется следующая конструкция. Точки B, B', C' и C лежат на одной окружности. Прямые BB' и CC' пересекаются в точке A'. Требуется доказать, что существует четыре окружности касающиеся прямых $B'C$, $C'B$ и описанных окружностей треугольников $A'BC$ и $A'B'C'$.

Пусть P — точка повторного пересечения прямой $C'B$ и окружности $A'B'C'$. Аналогично, Q — точка повторного пересечения прямой CB' и окружности BCA'. Тогда с помощью теоремы о вписанном угле получаем, что

$$\angle B'PB = \angle B'A'C' = \angle B'QB \text{ и} \tag{8}$$

$$\angle PB'A = \angle PC'A' = \angle BB'Q. \tag{9}$$

Мы видим, что четырехугольник $B'PBQ$ представляет из себя дельтоид, поэтому существует две окружности, касающиеся его сторон. Заметим также, что

$$\angle PC'B' = \angle BCB'. \tag{10}$$

То есть величины дуг PB и QB' в окружностях $A'C'B'$ и $A'BC$ равны. А значит, по теореме о сегменте для прямых $C'B$ и CB' существуют четыре окружности (по две на каждую вписанную в дельтоид окружность), касающиеся прямых $B'C$, $C'B$ и окружностей $A'BC$ и $A'B'C'$.

8. Теорема о трёх колпаках и одно свойство точек Фейербаха

Покажем, что в геометрии Лобачевского выполнена теорема о трёх колпаках, в некотором смысле двойственная к теореме о пересечении радикальных осей трёх окружностей. Она оказывается очень полезной во многих ситуациях. В частности, с ее помощью мы получим одно замечательное свойство точек Фейербаха.

Теорема 11 (Теорема о трёх колпаках). *Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — три окружности в геометрии Лобачевского. Пусть P_1 — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям ω_2 и ω_3. Аналогично определим точки P_2 и P_3. Тогда точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой. Теорема остается верной, если ровно две из трёх точек будут определяться как пересечение внутренних касательных.*

Данную теорему можно доказать, непосредственно воспользовавшись гиперболическим аналогом теоремы Менелая. Однако гораздо приятнее перенести классическое евклидово рассуждение, связанное с выходом в трёхмерное пространство.

Доказательство. Надстроим над каждой окружностью сферу того же радиуса и рассмотрим общую ко всем трем сферам касательную плоскость. Легко понять, что эта плоскость проходит через точки P_1, P_2 и P_3, поскольку содержит образующие соответствующих конусов. Но, поскольку плоскости пересекаются по прямой, касательная плоскость пересекает исходную по прямой, содержащей P_1, P_2 и P_3.

Поскольку точки P_1, P_2 и P_3 являются центрами гомотетий соответствующих окружностей, получаем следующую теорему.

Теорема 12 (Теорема Монжа). *Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — три окружности. Пусть P_1 — центр положительной гомотетии окружностей ω_2 и ω_3. Аналогично определим точки P_2 и P_3. Тогда точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой. Теорема остается верной, если ровно две из трёх гомотетий будут отрицательными.*

В приведенном доказательстве мы существенно опирались на то, что центр такой гомотетии существует (а если не существует, то использовали теорему об аналитическом продолжении). Однако для пересекающихся окружностей или в случае, когда одна окружность находится внутри другой, это, вообще говоря, не так очевидно. Давайте покажем, как можно избежать этих неприятностей.

Центром гомотетии окружностей ω_1 и ω_2 назовем такую точку, что прямые, проходящие через неё, пересекают ω_1 и ω_2 под равными углами. Таких точки две и, в зависимости от того как расположены эти углы относительно прямой, центр будет либо положительный, либо отрицательный.

Легко показать, что если через точку проходит две прямые, пересекающие ω_1 и ω_2 под равными углами, то все прямые, проходящие через эту точку, обладают этим свойством (достаточно сделать окружности симметричными относительно диаметра диска Пуанкаре). Одной из таких прямых является прямая, проходящая через центры окружностей. Она пересекает ω_1 и ω_2 под прямыми углами. В качестве второй такой прямой можно взять диаметр диска Пуанкаре, проходящий через евклидов центр гомотетии (положительный или отрицательный) двух окружностей (без ограничения общности можно считать, что оба центра окружности не лежат на одном диаметре). Он пересекает окружности под равными углами, а значит, представляет в модели Пуанкаре прямую плоскости Лобачевского, обладающую тем же свойством. Получили две прямые, пересекающие ω_1 и ω_2 под равными углами. Их пересечение и будет центром гомотетии.

Отсюда сразу следует теорема Монжа: прямая, пересекающая пары окружностей ω_1 и ω_2, и ω_2 и ω_3 под равными углами, также пересекает под равными углами окружности ω_1 и ω_3, т. е. проходит через их центр гомотетии.

Теорема Монжа оказывается чрезвычайно полезной при доказательстве различных утверждений о пересечении нескольких прямых в одной точке или принадлежности нескольких точек одной прямой. Вот одно из таких утверждений.

Теорема 13. *Пусть дан треугольник ABC и окружность ω. Пусть окружность ω_a касается лучей AB и AC, а также окружности ω в точке P_a (внутренним образом). Аналогично определяются окружности ω_b, ω_c и точки P_b и P_c. Тогда прямые AP_a, BP_b и CP_c пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть точка P — это центр положительной гомотетии окружности ω и вписанной окружности треугольника ABC. Тогда из теоремы Монжа следует, что точки A, P, P_a лежат на одной прямой. Аналогично рассуждаем для прямых BP_b и CP_c. Таким образом, все эти три прямые проходят через точку P.

Из доказательства становится ясно, что эта теорема допускает ряд вариаций. Например, можно потребовать, что все касания с окружностью ω — внешние. Тогда точкой пересечения будет центр отрицательной гомотетии вписанной окружности и ω.

Поскольку центр гомотетии вписанной окружности и окружности Эйлера лежит на прямой EI, из теоремы 13 следует такая теорема:

Теорема 14. *Пусть на плоскости Лобачевского дан треугольник ABC. Пусть F, F_a, F_b и F_c — точки касания его окружности Эйлера со вписанной и соответствующими вневписанными окружностями. Пусть I — это центр вписанной окружности треугольника. Тогда прямые FI, AF_a, BF_b и CF_c пересекаются в одной точке.*

9. А что же происходит на сфере?

Читатель, хорошо знакомый с геометрией Лобачевского, знает, что в «алгебраическом смысле» геометрия Лобачевского и сферическая геометрия устроены одинаково. Поэтому все описанные в этой статье рассуждения можно с легкостью применить и к случаю сферической геометрии. Это было бы даже в некотором смысле удобнее по двум причинам. Во-первых, сферическая геометрия «реальна». Сферу легко представить или пощупать (взять, например, глобус), она не требует сложных определений, теоремы выглядят более наглядными и мотивированными. Но при этом сфера обладает одним существенным недостатком: её очень неудобно рисовать на плоскости. Можно сделать, например, стереографическую проекцию и получить модель «сферы на плоскости», которая во многом аналогична модели Пуанкаре. Но получившаяся модель всё равно будет достаточно неудобна для работы хотя бы потому, что прямые очень сложно будет «на глаз» отличить от обычных окружностей (прямыми в этой модели будут окружности, относительно которых степень точки $(0;0)$ равна -1).

Для иллюстрации «похожести геометрий» покажем, как для сферы доказывается теорема Лекселя о геометрическом множестве таких точек X, что площадь треугольников ABX постоянна.

Прежде всего заметим, что эквидистантами на сфере являются обычные окружности (вот уж где действительно видно, что эквидистанты и окружности — это «одно и то же»). Если посмотреть на глобус и считать, что рассматриваемая прямая l — это экватор, то её эквидистантами будут параллели — окружности с центрами в северном и южном полюсе.

Второе замечание касается того, что будет «аналогом» точек A^* и B^* — точек, инверсных A и B относительно абсолюта модели Пуанкаре. Заметим, что точка A^* обладает тем свойством, что любая прямая, проходящая через A (которая является окружностью в модели Пуанкаре), проходит также и через точку A^*. На сфере этим свойством обладает противоположная точка, т. е. точка, симметричная A относительно центра сферы.

Теперь сформулируем аналог теоремы 7 на сфере.

Теорема 15 (теорема Лекселя). *Пусть A^* и B^* — это точки противоположные точкам A и B относительно центра сферы. Пусть ω — окружность, проходящая через точки A^* и B^*. Тогда для любой точки X, лежащей на окружности ω, площадь треугольника ABX будет постоянной, т. е. не будет зависеть от точки X.*

Доказательство. Существует очень простое и изящное доказательство того факта, что множество таких точек X является эквидистантой. Мы здесь приведем его набросок, подробное доказательство можно найти в [2] или [4].

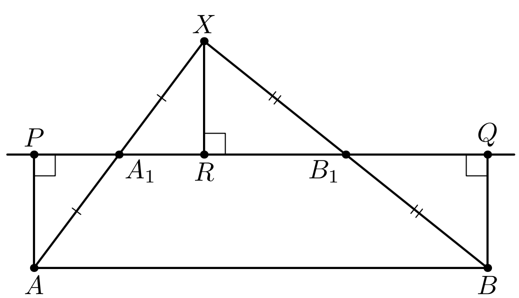

Рис. 5.

Пусть дан треугольник ABX (см. рис. 5). Обозначим через A_1 и B_1 середины сторон AX и BX соответственно, а прямую A_1B_1 за l. Пусть P, Q и R проекции точек A, B и X на прямую l. Заметим, что прямоугольные треугольники APA_1 и XRA_1 равны по гипотенузе и острому углу. То же самое можно сказать и про треугольники BQB_1 и XRB_1. Из этого можно сделать два вывода. Во-первых,

$$S_\triangle A_1XB_1 = S_\triangle APA_1 + S_\triangle BQB_1, \text{ поэтому } S_\triangle AXB = S_\square APQB.$$

А во-вторых, $AP = BQ = XR$, т. е. точки A и B лежат на эквидистанте прямой l, а на симметричной ей эквидистанте лежит точка X. Обозначим эти эквидистанты за ω' и ω соответственно.

Обратными рассуждениями можно показать, что для любой точки X' на окружности ω площадь треугольника $AX'B$ будет равна площади четырехугольника $APQB$ (отметим, что равенство нужных нам прямоугольных треугольников APA_1' и $X'R'A_1'$ будет выполняться по катету и острому углу).

Мы знаем, что на сфере для любой прямой l (большой окружности) эквидистанты — это обычные окружности, «параллельные» ей. Легко по-

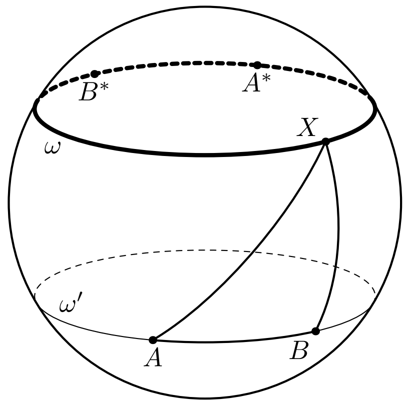

Рис. 6.

нять что ω и ω' симметричны не только относительно прямой l, но и также относительно центра сферы, поэтому ω будет проходить через точки A^* и B^* (т. е. будет той самой окружностью из условия леммы).

Для геометрии Лобачевского последний кусок этого доказательства надо немножко изменить, поскольку неясно, что будет в ней «симметрией относительно центра». Заинтересовавшийся читатель может самостоятельно посмотреть, как преобразование относительно центра сферы выглядит на стереографической проекции, и обнаружить, что это — инверсия относительно круга радиуса i. Поэтому в модели Пуанкаре логично взять в качестве этого преобразования инверсию относительно абсолюта (окружности радиуса 1). Тогда мы увидим, что *ω и ω' инверсны относительно абсолюта модели Пуанкаре*. Особенно легко это понять, если рассмотреть модель в верхней полуплоскости и считать, что прямая l — это луч, перпендикулярный линии абсолюта.

Благодарность

Автор благодарен Фёдору Петрову и Михаилу Вялому за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] А. В. Акопян, А. А. Заславский. *Геометрические свойства кривых второго порядка.* М.: МЦМНО, 2007.

[2] Л. С. Атанасян *Геометрия Лобачевского.* М.: Просвещение, 2001.

[3] П. В. Бибиков. *Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 13, 2009. С. 142–148.

[4] П. В. Бибиков, И. В. Ткаченко. *О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 11, 2007. С. 113–126.

[5] Л. А. Емельянов, Т. Л. Емельянова. *Семейство Фейербаха* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 6, 2002. С. 78–92.

[6] С. В. Маркелов. *Парабола как окружность* // Десятая летняя конференция Турнира городов. М.: МЦНМО, 1999. С. 36–42, 112–123.

[7] Ф. В. Петров. *Вписанные четырёхугольники и трапеции в абсолютной геометрии* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 13, 2009. С. 149–154.

[8] В. В. Прасолов. *Геометрия Лобачевского.* М.: МЦМНО, 2004.

[9] В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии.* М.: МЦМНО, 2006.

[10] В. Ю. Протасов. *Вокруг теоремы Фейербаха* // Квант, №9, 1992. С. 51–58.

[11] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. *Геометрия.* М.: МЦНМО, 1998.

[12] З. А. Скопец, В. А. Жаров. *Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия.* М.: Учпедгиз, 1962.

[13] О. В. Шварцман. *Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 11, 2007. С. 127–130.

А. В. Акопян