Нам пишут

Некоторые аддитивные соотношения в треугольнике Паскаля

А. В. Стояновский

Есть много известных аддитивных соотношений в треугольнике Паскаля (т. е. соотношений, включающих лишь суммы и разности чисел в треугольнике Паскаля). Некоторые из этих любопытных соотношений можно найти в книге Г. Эндрюса «Теория разбиений», М.: Наука, 1982. (Правда, в этой книге содержатся соотношения между так называемыми q-биномиальными коэффициентами, которые суть многочлены от переменной q. Чтобы получить из них соотношения между обычными биномиальными коэффициентами, нужно положить $q = 1$.)

В настоящей статье приводятся, по-видимому, новые любопытные соотношения, получаемые простейшим способом, а именно суммированием чисел в треугольнике Паскаля по вертикали до некоторого места. Чтобы показать, что такое суммирование до некоторой степени естественно, напомним некоторые хорошо известные соотношения, получающиеся суммированием по горизонталям и диагоналям. Те из них, которые читателю неизвестны, можно рассматривать в качестве упражнения.

Хорошо известно, что сумма чисел в треугольнике Паскаля,

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

лежащих на n-й горизонтали, равна 2^n,

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{1}$$

Известно также, что сумма чисел k-й диагонали до некоторого места равняется очередному числу из следующей диагонали,

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}. \tag{2}$$

Еще один известный факт состоит в том, что сумма чисел по n-й наклонной диагонали с наклоном $1/3$ (следующее число диагонали получается из предыдущего «ходом коня») равняется n-му числу Фибоначчи,

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \ldots = u_n, \tag{3}$$

где

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = u_1 = 1 \tag{4}$$

суть числа Фибоначчи.

Цель этой заметки — вывести формулу для суммы чисел вдоль вертикальной прямой до некоторого места,

$$C_n^k + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-4}^{k-2} + \ldots. \tag{5}$$

Вот эта формула.

Теорема. *Сумма* (5) *равняется знакопеременной сумме по следующей диагонали с наклоном* $1/3$, *начиная с ближайшего числа, плюс возможно* ± 1 *в зависимости от конкретной вертикали*:

$$\begin{aligned}
&C_n^k + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-4}^{k-2} + \ldots = \\
&= C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+2} + C_{n-1}^{k+3} - \ldots + \\
&+ \begin{cases} 0, \ n - 2k \leqslant 0, \\ 0, \ n - 2k > 0, n - 2k = 6p, 6p+3, \\ -1, \ n - 2k > 0, n - 2k = 6p+1, 6p+2, \\ 1, \ n - 2k > 0, n - 2k = 6p-1, 6p-2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6}$$

Эту теорему нетрудно доказать, если заметить, что обе части равенства (6) удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и числа в треугольнике Паскаля: обозначим левую часть равенства (6) через $LHS(n,k)$ (сокращение от *left hand side*), а правую часть через $RHS(n,k)$ (сокращение от *right hand side*), тогда

$$\begin{aligned}
LHS(n,k) &= LHS(n-1,k) + LHS(n-1,k-1), \\
RHS(n,k) &= RHS(n-1,k) + RHS(n-1,k-1).
\end{aligned} \tag{7}$$

Более точно, соотношения (7) выполняются при всех n и k, не лежащих на вертикали $n - 2k = 0$. Для n и k, лежащих на этой вертикали, нужно к правым частям обоих соотношений (7) прибавить единицу. Кроме того, числа $LHS(n,k)$ и $RHS(n,k)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям (при $k = 0$ и $k = n$, т. е. на границе треугольника Паскаля). Отсюда следует утверждение теоремы.

А. В. Стояновский
e-mail: stoyan@mccme.ru