О жордановых многоугольниках

А. А. Азамов

Плоскую замкнутую ломаную без самопересечений назовем жордановым многоугольником. Слово «жорданов» связано с тем, что определенные выше многоугольники являются частными случаями жордановых кривых, разбивающих плоскость на две части — ограниченную (называемую внутренностью многоугольника) и внешнюю [1].

Каждый угол при вершине v жорданова многоугольника либо лежит в интервале $(0, \pi)$, либо в интервале $(\pi, 2\pi)$. В первом случае углу будем приписывать число нуль и писать $\theta(v) = 0$, во втором — единицу и писать $\theta(v) = 1$. Таким образом каждому жорданову n-угольнику сопоставляется n-мерный вектор из нулей и единиц. Из теоремы о сумме углов многоугольника вытекает, что такие векторы содержат не меньше трех нулей.

Утверждение. *Любой n-мерный вектор, координаты которого нули и единицы, содержащий не менее трех нулей, является вектором, соответствующим некоторому жорданову многоугольнику.*

Пусть дан такой вектор, содержащий k нулей, $k \geqslant 3$. Соответствующий n-угольник можно построить, например, следующим образом: возьмем выпуклый k-угольник и каждую сторону заменим ломаной с необходимым числом звеньев выпуклостью вовнутрь. При этом получится такой многоугольник, что все лучи, исходящие из какого-то центра, пересекаются с многоугольником в точности в одной точке. Такие многоугольники называются звездными (относительно выбранного центра).

Назовем два жорданова n-угольника *изотопными*, если существует непрерывное отображение $t \mapsto (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, переводящее вершины одного многоугольника в вершины другого так, что при любом t точки образуют жорданов n-угольник.

Нетрудно заметить, что все выпуклые n-угольники изотопные с правильным n-угольником, следовательно, и друг с другом.

Пусть дан жорданов n-угольник с последовательными вершинами $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Выбрав какую-то вершину v_i, сопоставим ей вектор $\alpha_i = (\theta(v_i), \theta(v_{i+1}), \ldots, \theta(v_n), \theta(v_1), \ldots, \theta(v_{i-1}))$, так что векторы α_i получаются один из другого циклической перестановкой компонент. Совокупность $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ назовем *сигнатурой многоугольника*. Например, сигнатура выпуклого многоугольника состоит из одного нулевого вектора,

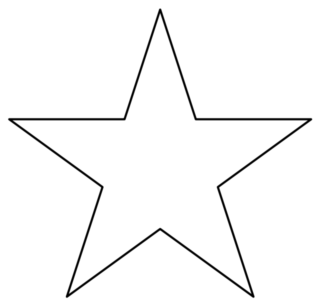

Рис. 1.

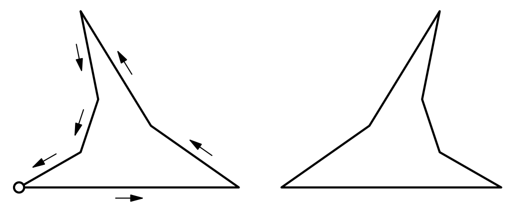

Рис. 2.

а сигнатура жордановой звезды (см. рис. 1) содержит всего два вектора: $(0,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ и $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,0)$.

Теорема. *Сигнатура является инвариантом изотопических многоугольников: если у двух многоугольников сигнатура одинакова, многоугольники изотопичны, если разная, то не изотопичны.*

Сперва докажем, что при изотопии сигнатура многоугольника не меняется. Пусть $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — изотопия n-угольника M_0 в n-угольник M_1, а M_t — n-угольник с вершинами $\gamma_i(t)$, которые соединяются в таком же порядке, как вершины $\gamma_i(0)$ в многоугольнике M_0 ($i = 1, 2, \ldots, n$). Из сигнатуры σ_t многоугольника M_t выберем тот вектор $\theta(t)$, компоненты которого определяются, начиная с вершины $\gamma_1(t)$ в направлении часовой стрелки. Ясно, что если значение t достаточно близко к 0, то $\theta(t)$ совпадает с $\theta(0)$ (при изотопии угол, меньше развернутого, в течение какого-то времени останется все еще меньше развернутого; то же самое верно и для угла больше развернутого).

Пусть s — наименьшее значение t, когда $\theta(t)$ окажется отличным от $\theta(0)$. Без потери общности можно считать, что в момент $t = s$ изменится первая компонента вектора (при этом не исключается, что в это же самое время у вектора еще какие-то другие компоненты также изменяются). Отсюда неумолимо следует, что при $t = s$ угол n-угольника M_t с вершиной $\gamma_1(t)$ становится развернутым (в частности, несколько соседних сторон, укорачиваясь, могут вырождаться в вершину). В любом случае около вершины $\gamma_1(t)$ число сторон уменьшится. Поскольку в процессе изотопии M_t должен оставаться n-угольником, то в момент $t = s$ где-то должны рождаться новые углы для компенсации потери сторон. Но угол многоугольника, существовавший в момент $t = s$, обязательно наличествовал и при значениях t, меньших, но достаточно близких к s. Это приводит к противоречию — получается, что для этих значений t число углов M_t было больше n.

Таким образом, сигнатура действительно не меняется при изотопии. Отсюда следует, например, что многоугольники, изображенные на рис. 2, не изотопные.

Далее докажем, что если два n-угольника имеют одну и ту же сигнатуру, то они изотопны.

Для этого достаточно убедиться, что любой n-угольник изотопен со звездным n-угольником. Это утверждение тривиально для $n = 3, 4$. Предположим, что оно верно для $(n-1)$-угольников. Пусть M — произвольный n-угольник с некоторой сигнатурой σ. Будем считать, что *никакие три вершины M не лежат на одной прямой* — этого всегда можно добиться изотопией, мало меняющей положение вершин. (Такие изотопии называются «малым шевелением»; ясно, что они не меняют сигнатуру.)

Лемма. *Существуют три последовательные вершины такие, что внутренность образуемого ими треугольника свободна от вершин M.*

В самом деле, всегда существует диагональ, делящая n-угольник на два многоугольника, естественно, с числом сторон, меньше n (см. [3, решение задачи 108]. Поэтому утверждение леммы легко выводится индукцией по числу сторон.

Возьмем треугольник $v_1v_2v_3$, внутренность которого свободна от других вершин. Внутренность отрезка v_1v_3 также свободна от вершин в силу сделанного выше предположения. Поэтому если удалить из n-угольника M стороны v_1v_2, v_2v_3 и присоединить вместо них новую сторону v_1v_3, то получится жорданов $(n-1)$-угольник M'. При этом вновь соединенная сторона не может оказаться продолжением соседних, так что в вершинах v_1 и v_3 образуется два новых угла, которые обозначим v_1' и v_3'. Все остальные углы M останутся неизменными.

Пусть M имеет сигнатуру σ, а M' — сигнатуру σ'. Возьмем в качестве представителя σ вектор $\alpha = (\theta(v_1), \theta(v_2), \theta(v_3), \theta(v_4), \ldots, \theta(v_n))$, а в качестве представителя σ' — вектор $\alpha = (\theta(v_1'), \theta(v_3'), \theta(v_4), \ldots, \theta(v_n))$.

Легко заметить, что если координаты $\theta(v_1)$, $\theta(v_2)$, $\theta(v_3)$ были равны 0, то и $\theta(v_1')$, $\theta(v_3')$ окажутся равными 0. Однако в других случаях возможны изменения. Например, из комбинации (1, 0, 0) может образоваться и (1, 0), и (0, 0) в зависимости от того, по какую сторону от продолжения отрезка μv_1 лежит сторона v_1v_n (рис. 3).

По предположению индукции M' изотопичен со звездным $(n-1)$-угольником M'' с вершинами $v_1'', v_3'', v_4'', \ldots, v_n''$. Заменив сторону $v_1''v_3''$ этого многоугольника ломаной $v_1''v_2''v_3''$, получим n-угольник M'''. Основываясь на том, что при малом шевелении свойство звездности многоугольника сохраняется, такую замену можно осуществить так, что, во-первых, M''' также будет звездным, во-вторых, сигнатура M''' совпадет со сигнатурой σ. На

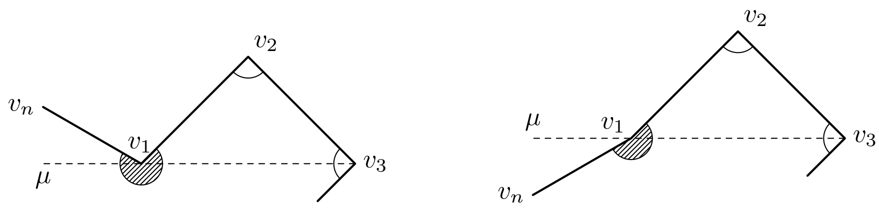

Рис. 3.

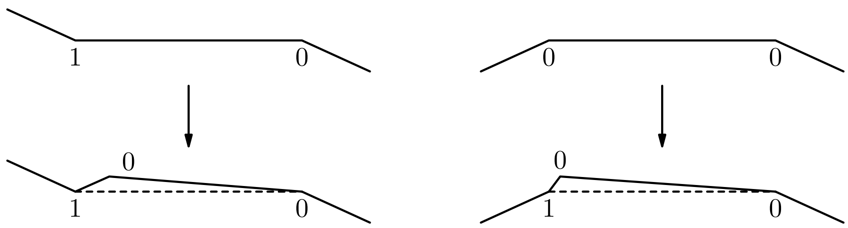

Рис. 4.

рис. 4 это показано для рассмотренных выше случаев (центр звездности находится на нижней стороне).

Ясно, что изотопия $M' \to M''$ порождает изотопию $M \to M'''$. Непосредственно можно убедиться в том, что эти рассуждения справедливы и в других случаях редукции $\theta(v_1), \theta(v_2), \theta(v_3) \to \theta(v_1'), \theta(v_3')$. Теорема доказана.

Число классов изотопии плоских n-угольников совпадает с числом сигнатур длины n. Обозначим это число s_n. Для него существует точная формула:

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} 2^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right) - \left[\frac{n}{2}\right] - 2, \tag{1}$$

где $\varphi(m)$ — количество чисел среди 1, 2, …, m, взаимно простых с m (функция Эйлера), а суммирование в (1) производится по всем делителям d числа n. Например, $s_4 = 2$, $s_5 = 4$, $s_6 = 9$, $s_7 = 15$, $s_8 = 29$, $s_9 = 54$, $s_{10} = 101$. Равенство (1) получается из известной формулы для числа ожерелий ([2, формула (3.56)]).

Таким образом, число различных классов изотопных n-угольников быстро растет вместе с n, а точное значение сложным образом зависит от того, сколько и каких делителей имеет n.

Заключение. Посмотрим на вышеизложенное с «высоты птичьего полета». В соответствии с «Эрлангенской программой» Ф. Клейна, существуют разные «геометрии». Каждая такая «геометрия» состоит из совокупности каких-то объектов и определенной группы преобразований. При этом если один объект можно преобразовать в другой, то они считаются эквивалентными. Согласно Клейну, цель соответствующей «геометрии» состоит в изучении свойств, общих для всех эквивалентных объектов, в том числе нахождений инвариантов группы преобразований. С этой точки зрения типичным является вопрос типа «Как узнать, что два объекта эквивалентные или, наоборот, не эквивалентные?» В одних случаях ответ получаются сравнительно просто (например, если объекты — жордановы многоугольники, а эквивалентность означает конгруэнтность), в других случаях очень сложно (например, когда объекты — узлы в трехмерном пространстве, а эквивалентность означает возможность преобразования одного узла в другой), чаще всего получить полный ответ не представляется возможным.

То, что вопрос об изотопичности плоских n-угольников удалось разобрать полностью, означает, что многоугольники являются всё-таки очень простым объектом геометрии. Об этом свидетельствует и то, что единственный инвариант — сигнатура образует полную систему инвариантов для изотопии. Нам кажется, что именно из-за простоты «геометрия», состоящая из совокупности жордановых многоугольников с группой изотопий может служить удачным примером для демонстрации идей, лежащих в основе «Эрлангенской программы». Это и было основной целью заметки. Автор благодарит В. М. Тихомирова, А. В. Арутюнова и М. Вялого за внимание и содействие.

Список литературы

[1] Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Наглядная топология*. М.: Наука, 1982.

[2] Сачков В.Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. М.: Наука, 1982.

[3] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Избранные задачи и теоремы планиметрии*. М.: Наука, 1967.

А. А. Азамов,
email: abdulla.azamov@gmail.com