Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Треугольник ABC может быть покрыт тремя единичными кругами с центрами в его вершинах. Соответствующие стороны треугольника $A'B'C'$ меньше соответствующих сторон треугольника ABC. Верно ли, что треугольник $A'B'C'$ обладает тем же свойством?

   (*Фольклор*)

2. К чему стремится объем n-мерного шара радиуса 2008 при $n \to \infty$?

   (*А. Я. Белов*)

3. Известно, что для любой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < \infty$. Докажите, что тогда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$.

   (*Фольклор*)

4. Для каких $\lambda \in [0,1]$ для любой непрерывной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $f(0) = f(1)$ обязательно найдется такое $x \in [0, 1-\lambda]$, что $f(x) = f(x+\lambda)$?

   (*Фольклор*)

5. Известно, что в любом треугольнике расстояние между O и I описанной и вписанной окружностей выражается через их радиусы R и r с помощью *формулы Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью l, то

   $$R^2 l^2 = (R^2 - OF_1^2)(R^2 - OF_2^2).$$

   (*А. А. Заславский*)

6. Докажите, что в алгебре матриц порядка n выполняются следующие тождества:

а) Тождество Размыслова:

$$n \cdot Tr(A) \cdot \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 x_{\sigma(3)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n^2-1)} y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma A x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdot \ldots \cdot y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)} +$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 A x_{\sigma(2)} y_2 \cdot \ldots \cdot y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)} +$$
$$+ \cdots + \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdot \ldots \cdot y_{n^2-1} A x_{\sigma(n^2)}$$

б) Тождество Амицура – Левицкого:

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(2n)} = 0.$$

Здесь x_i, y_i, A — произвольные матрицы, S_k — группа перестановок из k элементов, $(-1)^\sigma = +1$ для четных перестановок и $(-1)^\sigma = -1$ для нечетных.

7. Существует ли множество из $2(2n-1)$ точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, которое можно разбить на $2n-1$ пару точек так, чтобы любая прямая, проходящая через точки из разных пар, проходила бы еще через одну точку этого множества? (*Фольклор*)

8. Непрерывная функция f такова, что
$$\int_0^1 x^k f(x)dx = 1 \text{ для любого } k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$
Докажите, что
$$\int_0^1 (f(x)^2)dx \leqslant n^2.$$
(*SEEMOUS 2008, Mircea Dan Rus*)

9. В компании n человек. У каждого своя новость. Они перезваниваются, причем в каждом разговоре собеседники сообщают друг другу все известные им новости.

   а) Докажите, что понадобится не менее, чем $2n-4$ звонка, чтобы все узнали все новости.

   б) За один день каждый человек участвует не более, чем в одном разговоре. Какое минимальное количество дней необходимо, чтобы все узнали все новости? (*А. В. Анджанс*)

10. *k-параллелепипедом* называется прямоугольный параллелепипед, среди ребер которого имеется не более k различных. Докажите, что если параллелепипед P можно разрезать на k-параллелепипеды, то длины его ребер порождают векторное пространство размерности не выше k над $\mathbb{Q}$.

    (*Л. Радзивиловский, И. Фещенко, Д. Радченко, М. Танцура*)

11. Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не представимо в виде разности $x^2 - y^3$, (x, y – целые). (*Фольклор*)

12. Докажите, что следующие числа могут начинаться с любой комбинации цифр: а) 2^{n^2} б) $2^{2^n 3^k}$.

    в) Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{2^n} периодична, счетно, а множество $B \subset \mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{10^n} периодична, несчетно. (*А. Канель*)