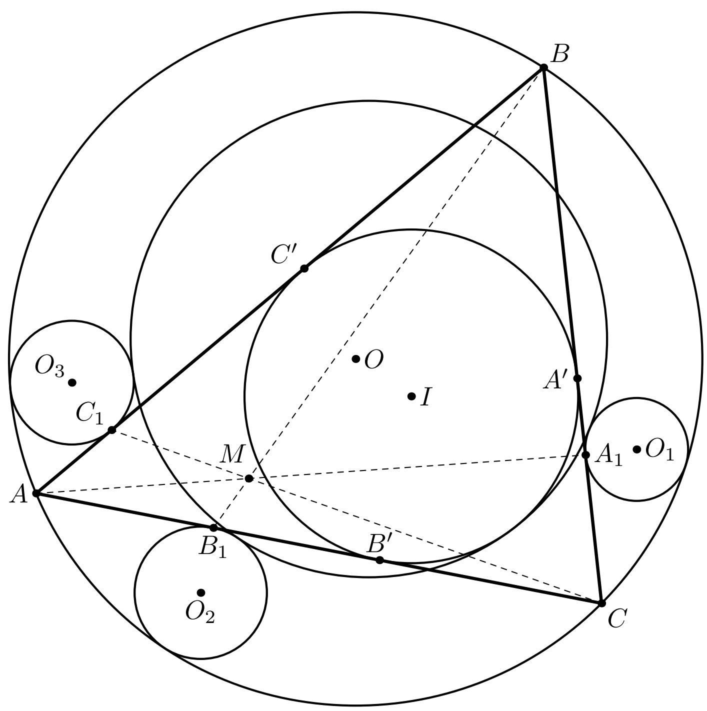
# Решения задач из предыдущих выпусков

7.8. Условие. Пусть $ABC$ — произвольный треугольник, а $M$ — точка внутри треугольника. Проведём через точку $M$ три чевианы, основания которых — $A_1$, $B_1$, $C_1$. Построим вне треугольника три окружности, касающиеся сторон треугольника в основаниях чевиан и описанной окружности, и четвёртую, касающуюся этих трёх внешним образом. Тогда эта окружность касается вписанной окружности треугольника внутренним образом.




Решение.

Мы применим теорему Кэзи[1)]: четыре окружности $s_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ касаются окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{42} \pm t_{14}t_{23} = 0,$$

[1)]Доказательство теоремы Кэзи см., например, в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования», М.: ГИТТЛ, 1956.

где $t_{ij}$ — длина общей касательной к окружностям $s_i$ и $s_j$.

В нашем случае окружности $s_1$, $s_2$, $s_3$ — окружности с центрами $O_1$, $O_2$, $O_3$ (см. рис.), а окружность $s_4$ — это вписанная в треугольник $ABC$ окружность. Докажем, что

$$t_{12}t_{34} - t_{13}t_{42} - t_{14}t_{23} = 0, \tag{1}$$

где $t_{12}$, $t_{13}$ и $t_{23}$ — длины общих внешних касательных, а $t_{34}$, $t_{42}$ и $t_{14}$ — длины общих внутренних касательных.

Будем рассматривать точки $A$, $B$, $C$ как вырожденные окружности радиуса 0. Через $t_{Ai}$ ($t_{Bi}$, $t_{Ci}$) будем обозначать длины касательных из точки $A$ ($B$, $C$) к окружности $s_i$.

Запишем теорему Кэзи для окружностей $A$, $B$, $s_1$, $C$ (они все касаются описанной вокруг треугольника $ABC$ окружности):

$$t_{A1}t_{BC} = t_{AB}t_{C1} + t_{AC}t_{1B}, \text{ т.е.}$$
$$t_{A1} \cdot BC = AB \cdot CA_1 + AC \cdot A_1B.$$

Отсюда получаем

$$t_{A1} = AB \cdot \frac{CA_1}{BC} + AC \cdot \frac{A_1B}{BC}\,. \tag{2}$$

Аналогично

$$t_{B2} = BA \cdot \frac{CB_1}{AC} + BC \cdot \frac{B_1A}{AC}\,, \tag{3}$$

$$t_{C3} = CB \cdot \frac{AC_1}{AB} + CA \cdot \frac{C_1B}{AB}\,. \tag{4}$$

Запишем теорему Кэзи для окружностей $B$, $C$, $s_2$ и $s_3$:

$$t_{C_3}t_{B_2} = t_{CB}t_{23} + t_{C2}t_{3B}, \text{ т.е.}$$
$$t_{C_3}t_{B_2} = CB \cdot t_{23} + CB_1 \cdot C_1B,$$

откуда, используя (3) и (4) получаем

$$t_{23} = \frac{AB \cdot B_1C \cdot C_1A + BC \cdot C_1A \cdot AB_1 + CA \cdot AB_1 \cdot BC_1}{AB \cdot CA}\,. \tag{5}$$

Аналогично

$$t_{12} = \frac{AB \cdot B_1C \cdot CA_1 + BC \cdot CA_1 \cdot AB_1 + CA \cdot AB_1 \cdot BC_1}{BC \cdot CA}\,, \tag{6}$$

$$t_{13} = \frac{AB \cdot BC_1 \cdot CA_1 + BC \cdot C_1A \cdot A_1B + CA \cdot A_1B \cdot BC_1}{BC \cdot AB}\,. \tag{7}$$

Теперь найдем $t_{34}$, $t_{42}$, $t_{14}$:

$$t_{34} = C_1C' = BC_1 - BC' = BC_1 - \frac{AB + BC - CA}{2}\,, \tag{8}$$

$$t_{42} = B'B_1 = AB' - AB_1 = \frac{CA + AB - BC}{2} - AB_1\,, \tag{9}$$

$$t_{14} = A_1A' = CA' - CA_1 = \frac{BC + CA - AB}{2} - CA_1\,, \tag{10}$$

здесь $A'$, $B'$, $C'$ — точки касания сторон треугольника со вписанной окружностью.

Подставив (5)–(10) в (1) после упрощения получим

$$t_{12}t_{34} - t_{13}t_{42} - t_{14}t_{23} = \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 - A_1 \cdot B_1C \cdot C_1A}{2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA} (2 \cdot AB \cdot BC + \\ + 2 \cdot BC \cdot CA + 2 \cdot CA \cdot AB - AB^2 - BC^2 - CA^2).$$

Это выражение равно 0, если

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 - A_1 \cdot B_1C \cdot C_1A = 0, \tag{11}$$

так как

$$2 \cdot AB \cdot BC + +2 \cdot BC \cdot CA + 2 \cdot CA \cdot AB - AB^2 - BC^2 - CA^2 = \\ = 4\big(AB' \cdot CA' + BC' \cdot AB' + CA' \cdot BC'\big) \neq 0.$$

Условие (11) равносильно условию конкурентности прямых $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, т. е.

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

(*Л. А. Емельянов*)

8.1. Условие. Можно ли получить все возможные состояния кубика Рубика, последовательно выполняя некоторую комбинацию поворотов? (Учитываются только конечные, а не промежуточные состояния.)

Решение.

Предположим, что это возможно. Тогда существует такая комбинация поворотов $K$, что каждое состояние представимо степенью $K$. Но тогда и каждый поворот каждой грани кубика представим степенью $K$. Следовательно, повороты граней кубика должны быть перестановочны (коммутировать), но это неверно: повороты двух соседних граней неперестановочны. Полученное противоречие доказывает, что такой комбинации не существует. (*А. К. Ковальджи*)

9.2. Условие. Дано $n$ магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и 1 пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот.)

Решение. 1. Будем считать, что на пустой катушке тоже намотана виртуальная лента, а после перемотки две катушки обмениваются лентами, причем обе ленты меняют свои концы. Тогда ленты меняют концы парами.

Предположим, что $n$ нечетно и нам удалось перемотать все начальные ленты наоборот, тогда в силу четности перемен концов и виртуальная лента поменяет конец. Это означает, что каждая лента сделала нечетное число перемоток, в том числе и виртуальная.

2. Если виртуальная лента вернулась на пустую катушку, то некоторые из остальных лент сделали циклическую перестановку. А поскольку виртуальная лента в итоге оказалась на своем месте, то среди остальных лент было сделано несколько циклических перестановок. Вместе с тем виртуальная лента делает на одну перемотку больше, чем длина цикла перестановки. Следовательно, число четных циклов нечетно.

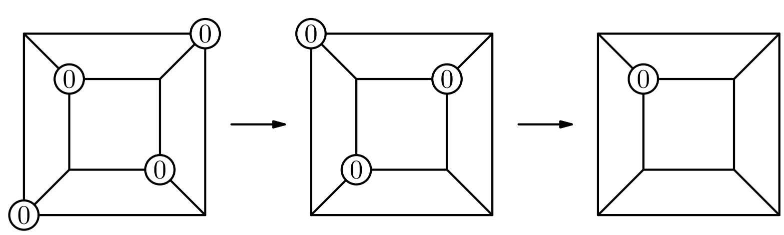
3. С другой стороны, чтобы вернуть все ленты на свои места необходимо четное число транспозиций, а нечетное число четных циклов требуют нечетного числа транспозиций. Полученное противоречие доказывает, что такая перемотка невозможна. (*А. К. Ковальджи*)

10.1. Условие. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найдите все такие числа.

Решение.

1. Если указанные 8 чисел уменьшить на одну и ту же величину, то указанное свойство их усреднения не изменится. Поэтому можно считать, что наименьшее число равно нулю, а остальные неотрицательны.

2. Поскольку нулевое число может получиться только усреднением нулей, то на предыдущем шаге (а процесс продолжается в обе стороны) три соседние числа равнялись нулю. А еще на предыдущем шаге уже 4 числа равнялись нулю (см. рис.). А еще на предыдущем шаге другие 4 числа должны равняться нулю. Возникает «мигалка», когда то одна, то другая четверка вершин обращается в нуль.




3. Рассмотрим четверку чисел, которая дополняет четверку нулей. Сделав один шаг, замечаем, что максимальное из чисел четверки не уменьшается только в том случае, если три наибольших числа равны. Это

необходимое условие зацикливания. С таким же успехом и три минимальных числа в этой четверке равны. Следовательно, все числа равны.

4. Возвращаясь к исходным числам, получаем, что числа распались на две четверки одинаковых чисел, которые при каждом шаге меняются местами. Это и есть ответ. *(А. К. Ковальджи)*

11.1. Условие. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}.$$

Решение.

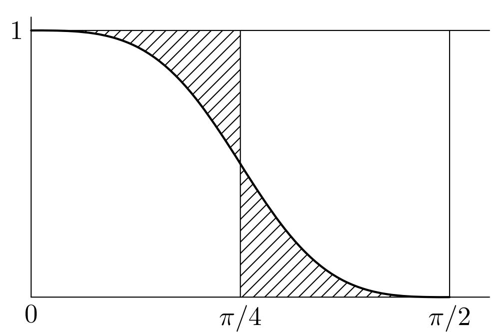
Сделаем замену $t = \operatorname{arctg} x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$ и

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^\pi t}.$$

Вычислим площадь под графиком функции $y(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^\pi x}$, $x \in (0;\pi/2)$. Для этого заметим, что график симметричен относительно точки $(\pi/4, 1/2)$:

$$y(\pi/2-x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^\pi(\pi/2-x)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^\pi x}} = \frac{\operatorname{tg}^\pi x}{1+\operatorname{tg}^\pi x} = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^\pi x} = 1 - y(x).$$

Значит, площадь под графиком функции $y(x)$ при $x \in (\pi/4;\pi/2)$ равна площади между прямой $y = 1$ и графиком $y(x)$ при $x \in (0;\pi/4)$ (см. рис.). Тем самым, искомый интеграл равен площади прямоугольника со сторонами 1 и $\pi/4$.

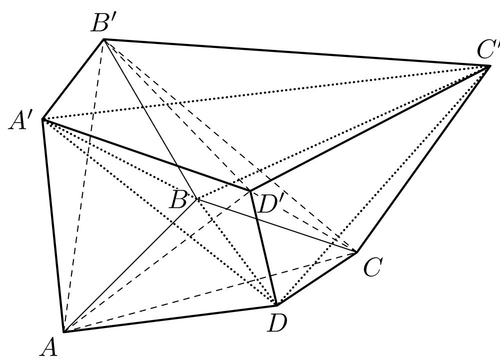



*(М. Ю. Панов)*

11.2. Условие. Назовем *кубоидом* выпуклый многогранник в трехмерном пространстве, комбинаторно эквивалентный кубу (т. е. существует взаимно однозначное соответствие между их вершиами, ребрами и гранями, сохраняющее примыкание). Рассмотрим для каждой грани точку пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Эти 6 точек являются вершинами некторого октаэдра.

Какие значения может принимать отношение объема этого октаэдра к объему исходного кубоида?

Решение.




В любой кубоид можно канонически вписать два тетраэдра, все ребра которых являются диагоналями граней кубоида (см. рисунок). Обозначим через $O$ объем октаэдра, заданного в условии задачи, через $K$ — объем кубоида, через $T_1$ и $T_2$ — объемы канонически вписанных в кубоид тетраэдров. Ниже будет доказана формула:

$$O = \frac{1}{8}\Big(K + \frac{T_1 + T_2}{2}\Big). \tag{$*$}$$

Из нее следует очевидное двойное неравенство

$$\frac{1}{8}K < O < \frac{1}{4}K. \tag{$**$}$$

Станем плавно деформировать кубоид так, чтобы вершины одной из граней слились в одну точку (тогда кубоид превратится в пирамиду). При этом формула $(*)$ останется справедливой и для конечного положения, когда кубоид уже не будет являться кубоидом (правда, неравенства в $(**)$ могут стать нестрогими). Очевидно, что в конечном положении оба тетраэдра вырождаются и имеет место формула $O = \frac{1}{8}K$.

В силу непрерывной зависимости объема от положения вершин при приближении тетраэдра к конечному положению $O$ пробегает значения, как угодно близкие к $\frac{1}{8}K$.

Теперь произведем другую деформацию, при которой в конечном положении совпадут соответственно точки  с $B$, $C$ с $D$, $B'$ с $C'$, $D'$ с $A'$. Тогда кубоид превратится в тетраэдр, причем с этим тетраэдром совпадут и оба канонически вписанных в кубоид тетраэдра. Очевидно, в конечном положении будет справедлива формула $O = \dfrac{1}{4}K$. Тем самым, получаем следующий

Ответ: $O$ принимает все значения из интервала $\left(\dfrac{1}{8}K; \dfrac{1}{4}K\right)$.

Доказательство формулы $(*)$.

Кое-что о вычислении объёмов. Известно, что если тройка векторов $a_i$, $a_j$, $a_k$ имеет ориентацию по часовой стрелке относительно точки $P$, к которой приложены эти вектора, то смешанное произведение $([a_i, a_j], a_k)$ равно ушестеренному объему тетраэдра, натянутого на эти вектора.

Этот факт допускает следующее обобщение. Пусть $P$ — произвольная точка пространства, $M$ — пространственное тело (не обязательно односвязное), поверхность которого разбита на треугольники с вершинами $A_1$, $A_2$, …, $A_n$. Пусть $A_i$, $A_j$, $A_k$ — произвольный треугольник этого разбиения, причем его вершины перечислены в порядке, соответствующем обходу по часовой стрелке, если смотреть на треугольник со стороны внутренности тела. Сопоставим этому треугольнику значение смешанного произведения $([\vec{PA_i}, \vec{PA_j}], \vec{PA_k})$, которое с точностью до знака равно ушестеренному объему тетраэдра $PA_iA_jA_k$. Сумма таких смешанных произведений по всем треугольникам разбиения поверхности тела $M$ равна $6 \cdot$ (объем тела $M$). Из этой формулы можно получить такое

Следствие. Пусть $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ — диагонали произвольного октаэдра, т. е. 3 вектора, каждый из которых соединяет пару противоположных вершин октаэдра. Тогда, с точностью до знака, их смешанное произведение равно $6 \cdot$ (объем октаэдра).

Для доказательства достаточно представить каждую диагональ в виде разности векторов, проведенных к вершинам, и раскрыть скобки.

Далее обозначения $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ используются для октаэдра из условия задачи.

Вернемся к доказательству формулы $(*)$. Обозначим через $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ вектора главных диагоналей кубоида, направление которых выбрано так, чтобы они всегда начинались на одном из канонически вписанных тетраэдров, а заканчивались на другом: $d_1 = AC'$, $d_2 = B'D$, $d_3 = CA'$, $d_4 = D'B$. Учитывая, что каждая вершина октаэдра (рассматриваемая, как вектор) представляет собой среднее арифметическое 4 вершин той грани, к которой она принадлежит, можно записать следующую формулу

$$\frac{1}{6}O = \omega_1\omega_2\omega_3 = \frac{d_1 + d_2 - d_3 - d_4}{4} \cdot \frac{d_1 - d_2 + d_3 - d_4}{4} \cdot \frac{d_1 - d_2 - d_3 + d_4}{4} =$$
$$= \frac{1}{16}\bigl(d_1d_2d_3 + d_1d_3d_4 + d_1d_4d_2 + d_4d_3d_2\bigr).$$

Отметим, что величины $d_1$, $d_2$, $d_3$ могут также рассматриваться как диагонали октаэдра $ACDA'B'C'$, представляющего собой кубоид без двух «угловых» тетраэдров, «окружающих», соответственно, вершины $B$ и $D'$, а именно, $ABCB'$ и $A'D'C'D$. Аналогичные замечания можно сделать и для троек $d_1$, $d_3$, $d_4$; $d_1$, $d_4$, $d_2$; $d_4$, $d_3$, $d_2$. Отметим также, что каждый из двух канонических тетраэдров представляет собой разность кубоида и четырех из восьми «угловых» тетраэдров кубоида. С учетом этих наблюдений (допуская некоторую вольность обозначений) можно продолжить вышеприведенное равенство:

$$O = \frac{1}{16}(4\text{ октаэдра}) =$$
$$= \frac{1}{16}\big(4(\text{кубоида} - 2\text{ уг.тетраэдра})\big) = \frac{1}{16}\big(4\text{ кубоида} - 8\text{ уг.тетраэдра}\big) =$$
$$= \frac{1}{16}\big(2\text{ кубоида} + (\text{кубоид} - 4\text{ уг.тетраэдра}) + (\text{кубоид} - 4\text{ уг.тетраэдра})\big) =$$
$$= \frac{1}{8}\Big(K + \frac{T_1 + T_2}{2}\Big).$$

Формула $(*)$ доказана. (*Р. М. Травкин*)

12.10. Условие. Назовем множество $C$ перестановок $n$ элементов *хорошим*, если для любого ненулевого набора чисел $v_1, \ldots, v_n$ такого, что $\sum_i v_i = 0$, найдется такая перестановка $\pi$ из множества $C$, что $\sum_{i=1}^k v_{\pi(i)} > 0$ для всех $k$ от 1 до $n-1$. Если заменить строгое равенство на нестрогое, то получится определение *неплохого* множества. Какова мощность наименьшего хорошего (неплохого) множества? а) Мощность наименьшего неплохого множества равна $n$. б) Существует хорошее множество мощности $n2^n$. в) (открытая проблема) Доказать, что мощность хорошего множества экспоненциально велика по $n$.

Решение.

Покажем, что наименьший размер неплохого множества равен $n$, а наименьший размер хорошего множества равен $n(n-1)$.

Сначала покажем, что каждое неплохое множество содержит хотя бы $n$ перестановок, а каждое хорошее — хотя бы $n(n-1)$.

В самом деле, рассматривая векторы, у которых $v_k > 0$, а остальные координаты отрицательны, получаем, что в неплохом множестве должна быть перестановка с первым элементом $k$. Отсюда получается, что перестановок в неплохом множестве должно быть хотя бы $n$.

Рассматривая для каждой пары $1 \leqslant k, l \leqslant n$ различных номеров $k$ и $l$ вектор с $v_k = 1$, $v_l = -1$, $v_j = 0$ при $j \neq k, l$ выясняем, что в хорошем множестве должна найтись перестановка с первым элементом $k$ и последним элементом $l$. Значит, перестановок в хорошем множестве должно быть хотя бы $n(n-1)$.

Перейдем к построению примеров неплохих и хороших множеств.

Ключевой для нас является следующая (известная)

Лемма 1. По кругу написано несколько вещественных чисел с неотрицательной суммой. Тогда найдется такое место, что все частичные суммы написанных чисел начиная с него по часовой стрелке неотрицательны.

Доказательство. Рассмотрим несколько подряд чисел так, чтобы их сумма была наибольшей возможной. Пусть эти числа (по часовой стрелке) суть $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$. Пронумеруем и оставшиеся числа — от $x_{k+1}$ до $x_n$. Докажем, что в качестве требуемого числа подходит $x_1$. В самом деле, при $j \leqslant k$ имеем $x_1+\dots+x_j = (x_1+\dots+x_k)-(x_{j+1}+\dots+x_k) \geqslant 0$ в силу нашего выбора чисел от $x_1$ до $x_k$. При $j > k$ имеем

$$x_1+\dots+x_j =$$
$$= (x_1+\dots+x_n)+((x_1+\dots+x_k)-(x_{j+1}+\dots+x_n+x_1+\dots+x_k)) \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. По кругу написано несколько вещественных чисел с положительной суммой. Тогда найдется такое место, что все частичные суммы начиная с него по часовой стрелке положительны.

Доказательство. Уменьшим немного каждое из чисел так, чтобы сумма осталась положительной и воспользуемся для нового набора чисел доказанной леммой.

Из леммы 1 сразу следует, что множество из $n$ циклических перестановок чисел от 1 до $n$ является неплохим.

Приведем пример хорошего множества из $n(n-1)$ перестановок. Для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ рассмотрим $n-1$ перестановку, в которых последним элементом является $k$, а остальные элементы переставляются по циклу. Например, при $n = 4$ и $k = 3$ это будут перестановки 1243, 2413, 4123. Докажем, что построенный набор $n(n-1)$ перестановок является хорошим. Действительно, для ненулевого вектора $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ с нулевой суммой координат найдется такое $k$, что $v_k < 0$. Тогда сумма всех координат, кроме $v_k$, положительна, и среди перестановок нашего множества, в которых число $k$ стоит на последнем месте, согласно следствию из леммы найдется требуемая.

Замечание. Часто лемму формулируют так: На круговом шоссе расположено $n$ бензоколонок, суммарного количества бензина в которых хватит, чтобы объехать все шоссе. Докажите, что машина с пустым баком может (заправляясь на бензоколонках) объехать все шоссе с некоторого места по часоой стрелке.

*(Ф. В. Петров)*