

Фуксовы группы: от топологии к геометрии

М. Н. Вялый О. В. Шварцман

Группа Γ движений плоскости Лобачевского Λ^2 называется *дискретной*, если орбита $\{\Gamma x\}$ любой точки $x \in \Lambda^2$ является дискретным множеством плоскости. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского называются *фуксовыми группами*. С помощью фуксовых групп бесформенным топологическим поверхностям удалось придать строгую геометрическую форму. К радости как самой поверхности, так и почти всей современной математики, новый геометрический костюм оказался нежестким.

Хотя наша цель — фуксовы группы, начать нужно с поверхностей. Начнем немедленно, а в качестве отличного путеводителя по теме рекомендуем книгу В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича [1].

1. ПОВЕРХНОСТИ КАК ПРЕДМЕТ ИСКУССТВА КРОЙКИ И СКЛЕЙКИ

1.1. Топология не видит особой разницы между поверхностью гири и бублика. Обе они напоминают поверхность под именем тор, изображенную на рис. 1.

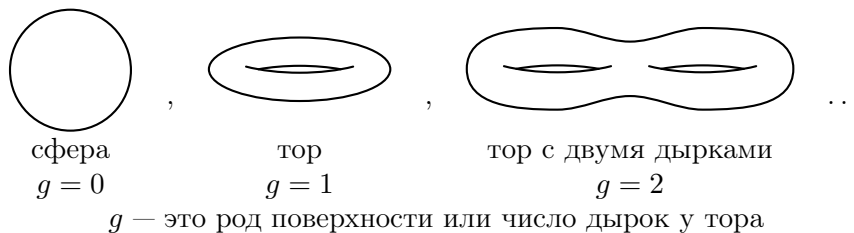


Рис. 1.

Рассматривая поверхности гири и бублика, тополог скажет, что они *гомеоморфны* (и считаются в топологии одинаковыми). Более точно, фигуры A и B называются гомеоморфными, если между их точками можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие $f: A \rightarrow B$. Последнее означает, что как само отображение f , так и его теоретико-множественное обращение, являются непрерывными отображениями.

Представим клоунскую гирию, поверхность которой сделана из эластичной пленки. С топологической точки зрения эту пленку можно как угодно деформировать, не допуская разрывов. Имея в виду такую свободу, не так уж сложно вообразить деформацию, после которой поверхность гирии переходит в поверхность бублика.

1.2. Раньше квартиры обогревались в зимнюю стужу многосекционными батареями. Поверхность такой батареи (если пожертвовать техническими мелочами) представляет из себя с топологической точки зрения одну из поверхностей ряда, представленного на рис. 1 (число дыр равно удвоенному числу секций минус один).

Гомеоморфна ли, скажем, шестисекционная батарея трехсекционной? Чувствуется, что нет. Но как это доказать? Для этого можно использовать *топологический инвариант*, т. е. величину, одинаковую для всех гомеоморфных поверхностей. Таким инвариантом, различающим поверхности, окажется *характеристика Эйлера* (см. ниже раздел 2).

1.3. Пора договориться о том, что в этом очерке будет называться поверхностью. Это будет связная, компактная фигура в E^3 , причем такая, что у каждой ее точки есть окрестность, гомеоморфная открытому диску на плоскости.

Впрочем, поверхности с краем тоже важны: если на торе вырезать «круглую» дыру, то получится компактная поверхность с краем, которая называется ручкой. Склеивая две ручки их краями, получим тор с двумя дырами или крендель (третья слева поверхность на рис. 1). Следующую поверхность в ряду, намеченном на рис. 1, можно получить, склеивая продырявленный крендель и ручку. Итак, шаг вправо на рис. 1 осуществляется операцией приклеивания ручки. Запомним это.

Аналогичным образом можно получить двухсекционную батарею склейкой двух односекционных батарей.

1.4. Поверхность можно получить топологической склейкой сторон многоугольника. Нарисуем на плоскости $2n$ -угольник L , ограничивающий топологический диск D . Разобьем произвольным образом множество его сторон на пары, отметив одной и той же буквой стороны, попавшие в одну пару. Выберем направление обхода многоугольника, после чего можно говорить о начале и конце стороны. Стороны, попавшие в одну пару, предназначены для топологической склейки. Что это означает? Каждая сторона гомеоморфна отрезку. Склеить стороны в паре (a, a) означает рассмотреть такой гомеоморфизм φ_a указанных отрезков, который начало одного переводит в конец другого. Способ склейки — важный момент в нашей истории: если хотя бы в одной паре приклеить начало к началу, то склейку нельзя будет вложить в E^3 без самопересечений (доказать это непросто).

Вершина 2 склеивается с вершиной 5, а вершина 1 — с вершиной 6.

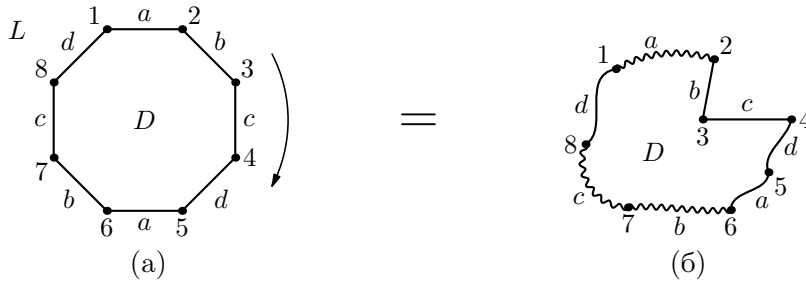


Рис. 2.

Многоугольник L с разбитыми на пары сторонами мы будем называть *выкройкой*. Через $X(L)$ мы будем обозначать склейку по выкройке L .

На рис. 2(а) изображена восьмиугольная выкройка L . Строгая форма этой выкройки не должна вводить в заблуждение: с равным успехом мы могли бы работать и с чем-то таким, как на рис. 2(б).

Обход многоугольника L дает циклическое слово $w = abcdabcd$ (потому циклическое, что его можно читать с любого места), составленное из букв на его сторонах. Ясно, что циклическое слово w полностью определяет выкройку.

Можно доказать, что любая поверхность S допускает такую выкройку L (и далеко не одну!), что $X(L) = S$. Наметим план доказательства, оставляя детали читателю.

Прежде всего нужно триангулировать поверхность, т.е. разбить ее на конечное число топологических треугольников T_i (фигур, гомеоморфных плоскому треугольнику), правильно примыкающих друг к другу. Это означает, что никакие два треугольника разбиения не имеют общей внутренней точки, и что любая сторона треугольника принадлежит в точности двум треугольникам разбиения. Возможность триангуляции вытекает из компактности поверхности.

Искомую выкройку L будем строить по шагам. Сначала выберем какой-нибудь треугольник T_1 и сопоставим ему плоский треугольник L_1 . На следующем шаге в качестве T_2 возьмем любой треугольник разбиения, имеющий общую сторону с треугольником T_1 . Склеим T_1 и T_2 по общей стороне и сопоставим полученному объединению плоский четырехугольник L_2 . Далее в качестве T_3 возьмем любой из треугольников, имеющих общую сторону с T_1 или T_2 , и сопоставим ему многоугольник L_3 , полученный приклеиванием треугольника к соответственной стороне L_2 . Добавляя таким образом на каждом шаге новый треугольник, мы будем получать всякий раз многоугольник, ограничивающий диск.

Если новый треугольник имеет более одной стороны, общей с предыдущими треугольниками, то вторую (а, если нужно, и третью) пару общих сторон мы отмечаем одинаковыми буквами, запоминая, что их нужно склеить.

Так как поверхность связна, то этот процесс закончится не раньше, чем мы переберем все треугольники разбиения (почему?). Поэтому у последнего многоугольника $L_t = L$ не останется неотмеченных сторон. Значит, склейка сторон многоугольника L восстанавливает поверхность S .

2. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫКРОЙКИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

2.1. Назовем две вершины выкройки эквивалентными, если они склеиваются в одну точку. Если v — число классов эквивалентных вершин, то назовем число $e(L) = 1 + v - n$ *эйлеровой характеристикой* выкройки L (напомним, что число сторон L равно $2n$).

Введем два элементарных преобразования выкроек, каждое из которых не меняет ни эйлеровой характеристики выкройки, ни топологического типа ее склейки. Последнее означает, что если выкройки L, L' получены одна из другой с помощью элементарного преобразования, то склейки $X(L)$ и $X(L')$ оказываются гомеоморфными.

Элементарное преобразование первого типа уничтожает пару смежных одинаково отмеченных сторон в склейке L с числом сторон не меньше, чем четыре. На рисунке 3 показано, как действует это преобразование. Заметим, что при уничтожении сторон четырехугольника мы получаем двуугольник. В элементарной геометрии такой фигуры, конечно, нет. Однако топологический двуугольник может иметь «кривые» стороны. При склейке двуугольной выкройки получается сфера.

Мы оставляем читателю проверку того, что $e(L) = e(L')$ и склейка $X(L)$ гомеоморфна $X(L')$. Отметим также, что преобразование первого типа всегда уменьшает оба числа n и v на 1.

Элементарное преобразование второго типа разрезает многоугольник L по диагонали на две части, в каждой из которых содержится сторона,

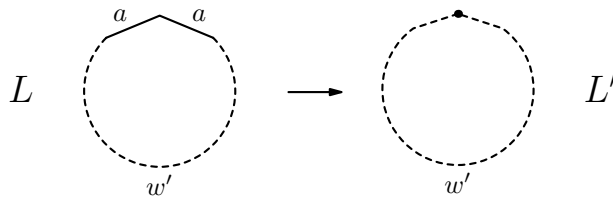


Рис. 3.

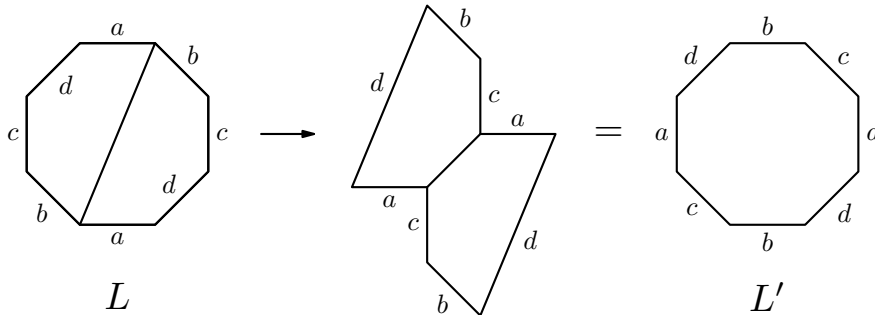


Рис. 4.

отмеченная, скажем, буквой d (см. рис. 4). Затем левый кусок приклеивается к правому по стороне d . Новая выкройка L' «поглощает» сторону d , а из диагонали рождаются две новые стороны, которые наследуют имя исчезнувшей стороны (см. рис. 4). Легко проверить, что такое преобразование не меняет чисел n и v , так что и эйлерова характеристика не изменяется. Кроме того, выкройка L' склеивается в ту же поверхность, что и L (мы ведь просто сначала распороли, а затем склеили то же самое в другом порядке).

С помощью элементарных преобразований первого и второго типа мы можем добиться того, чтобы

- а) никакие две одинаковые буквы в циклическом слове w не стояли рядом (если речь идет о поверхности, отличной от сферы);
- б) все вершины выкройки были эквивалентны ($v = 1$).

Мы пропускаем доказательство этого утверждения. Читатель может самостоятельно решить эту задачу или обратиться к начальным курсам по топологии, например, [2, гл. 1].

Выкройку, удовлетворяющую условиям а) и б), назовем *удобной*.

2.2. Удобную выкройку можно привести к стандартному виду (разложение на ручки, см. [7]).

ТЕОРЕМА 1. *Любую удобную выкройку с помощью элементарных преобразований второго типа можно привести к виду*

$$w = \underbrace{ababcdcdefef\dots}_{4g \text{ букв}}$$

(см. рис. 5). Эйлерова характеристика такой выкройки равна $2 - 2g$.

На стандартной выкройке физически ощутимо прослеживается g -кратное приклеивание ручки в E^3 ($abab$ — это ведь тор). Но с помощью этой

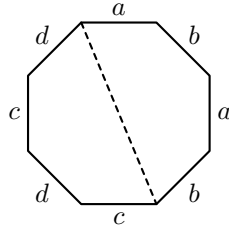


Рис. 5.

операции строится весь ряд поверхностей на рис. 1. Следовательно, любая поверхность S гомеоморфна ровно одной поверхности этого ряда, и эйлерова характеристика определяет топологический тип поверхности.

2.3. Кроме стандартной, есть и другие полезные канонические выкройки для поверхности рода g (эйлерова характеристика $2 - 2g$).

ТЕОРЕМА 2. Любую удобную выкройку L с эйлеровой характеристикой $e(L) = 2 - 2g$ с помощью элементарных преобразований второго типа можно привести к виду

$$w = ui, \quad \text{где } u \text{ — слово из } 2g \text{ букв.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $g = 1$ такая выкройка совпадает со стандартной.

Обе теоремы доказываются одновременно индукцией по g , которая базируется на сделанном выше замечании. Индуктивный переход опирается на следующую ключевую лемму.

ЛЕММА. Пусть в удобной выкройке встречаются две разделяющие друг друга пары букв: $w = \dots a \dots b \dots a \dots b \dots$. Тогда можно преобразовать выкройку так, что эти буквы будут непосредственно следовать друг за другом: $w = \dots abab \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. рис. 6.

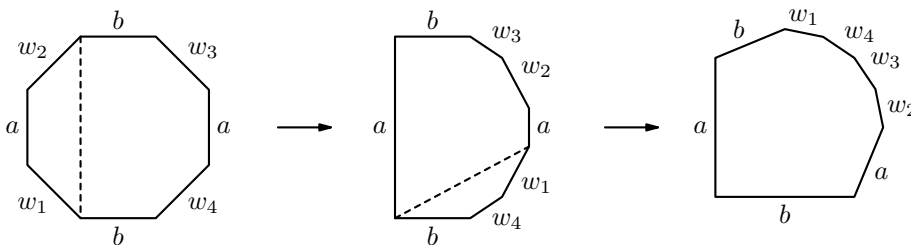
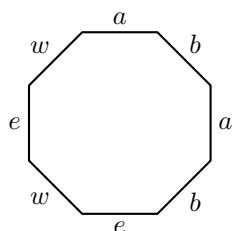


Рис. 6.

Читателю мы оставляем проверку того факта, что в удобной выкройке разделяющие пары действительно встречаются. (Подсказка: докажите, что если в выкройке нет разделяющих пар, то это выкройка сферы.) Отсюда с учетом леммы сразу получается доказательство теоремы 1.

Продолжим доказательство теоремы 2. Согласно индуктивному предположению можно считать, что перед нами выкройка вида, изображенного на рис. 7.



Под словом w спрятана целая ломаная, а e, a, b — это просто буквы.

Рис. 7.

С помощью двух элементарных преобразований второго типа получаем каноническую выкройку (рис. 8).

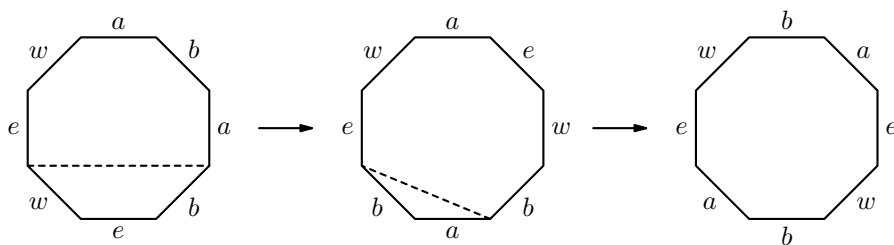


Рис. 8.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СКЛЕЙКИ И ФУКСОВЫ ГРУППЫ

3.1. Рассмотрим на плоскости Лобачевского правильный восьмиугольник \mathcal{P}_0 с углом $\pi/4$ при вершине.

В этом параграфе мы построим фуксову группу Γ , обладающую следующими свойствами:

- 1) всевозможные сдвиги $\{\gamma\mathcal{P}_0\}$, $\gamma \in \Gamma$, восьмиугольника \mathcal{P}_0 с помощью элементов из группы Γ образуют замощение плоскости Лобачевского плитками, конгруэнтными \mathcal{P}_0 ;
- 2) никакие две различные внутренние точки \mathcal{P}_0 не переводятся друг в друга движениями из группы Γ ;

- 3) напротив, мы укажем элементы группы Γ , отождествляющие противоположные стороны \mathcal{P}_0 (склеивающие их геометрически) по выкройке $w = abcdabcd$.

Из свойств 1) и 2) следует, что орбита $\{\Gamma x\}$ любой точки $x \in \Lambda^2$ пересекает многоугольник \mathcal{P}_0 не менее, чем в одной точке, а внутренность \mathcal{P}_0 — не более, чем в одной точке¹⁾. Таким образом, пространство орбит группы Γ на плоскости Λ^2 или, что то же самое, факторпространство $X = \Lambda^2/\Gamma$, есть не что иное, как склейка сторон \mathcal{P}_0 по выкройке, т. е. поверхность рода 2. Можно сказать, что фундаментальный многоугольник \mathcal{P}_0 — это геометрическая выкройка поверхности рода 2, аналогичная топологической выкройке, рассмотренной в п. 1.4 (рисунок 2).

Как будет ясно из дальнейшего, все наши построения проходят для любого правильного $4g$ -угольника с углом $\pi/2g$ при вершине. В этом случае геометрическая склейка $X = \Lambda^2/\Gamma$ является поверхностью рода g . При $g = 1$ события развиваются на евклидовой плоскости, где противоположные стороны единичного квадрата склеиваются с помощью группы $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ целочисленных параллельных переносов плоскости. Начиная с рода 2, уже нет возможности нарисовать правильный $4g$ -угольник с углом $\pi/2g$ на евклидовой плоскости. Зато такую возможность предоставляет плоскость Лобачевского Λ^2 , а роль группы склейки переходит к фуксовой группе Γ .

Чтобы следить за выполнением этой программы, полезно в качестве нового путеводаителя выбрать отличную статью Э. Б. Винберга [3].

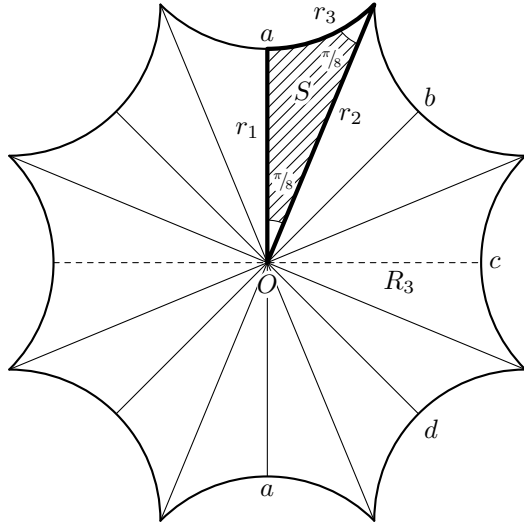
3.2. Рассмотрим на плоскости Лобачевского треугольник S с углами $\pi/2$, $\pi/8$, $\pi/8$, и через T обозначим группу, порожденную отражениями r_1 , r_2 , r_3 относительно сторон этого треугольника. Про группу T (треугольный гиперболический калейдоскоп по Э. Б. Винбергу) известно, в частности, следующее.

а) Группа T задается образующими r_1 , r_2 , r_3 с определяющими соотношениями $r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = (r_1 r_2)^8 = (r_2 r_3)^8 = (r_1 r_3)^2 = 1$ (определения образующих и соотношений приводятся ниже в разделе 4 на с. 43).

б) Многократные отражения треугольника S относительно его сторон приводят к замощению плоскости Λ^2 конгруэнтными копиями S . Это означает, что $\Lambda^2 = \bigcup_{t \in T} t(S)$, t пробегает всю группу T , причем треугольники $t_1(S)$ и $t_2(S)$ при $t_1 \neq t_2$ либо не имеют общих точек, либо имеют единственную общую вершину, либо прилегают друг к другу по целой стороне.

На рисунке 9 изображен фрагмент замощения, состоящий из 16 треугольников, выложенных в правильный восьмиугольник \mathcal{P}_0 с углом $\pi/4$ и центром в точке O .

¹⁾В теории дискретных групп преобразований всякий многоугольник с такими свойствами называется *фундаментальным многоугольником* для соответствующей группы.



Отражения r_1 и r_2 порождают подгруппу диэдра D_8 , оставляющую точку O на месте. Треугольники, полученные из треугольника S с помощью движений из группы диэдра, заполняют правильный восьмиугольник \mathcal{P}_0 .

Рис. 9.

в) Подгруппа T_0 группы T , порожденная отражениями r_1 и r_2 , состоит ровно из тех движений группы T , которые оставляют точку O на месте.

Ясно, что T_0 — это группа симметрии правильного восьмиугольника \mathcal{P}_0 , т. е. группа диэдра D_8 . Кроме того, $\mathcal{P}_0 = \bigcup_{t \in T_0} t(S)$.

г) Никакие две разные точки треугольника S не эквивалентны под действием группы T , т. е. не переводятся одна в другую нетождественным движением из этой группы.

Заметим, что, окружив каждую точку $t(O)$, $t \in T$, правильным восьмиугольником $\mathcal{P}_{t(O)}$, мы получаем замощение плоскости Λ^2 правильными восьмиугольниками, конгруэнтными восьмиугольнику \mathcal{P}_0 (для краткости будем говорить о замощении плиткой \mathcal{P}_0). Это замощение инвариантно под действием группы T .

3.3. 1) Построим группу Γ . Для этого рассмотрим отображение φ множества образующих $\{r_1, r_2, r_3\}$ группы T в группу T_0 , которое отражения r_1 и r_2 переводит в себя, а отражение r_3 — в то отражение R_3 из группы диэдра T_0 , зеркало которого ортогонально зеркалу отражения r_1 (см. рис. 9).

Образы $\varphi(r_i)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы T (проверьте это!). Следовательно, отображение φ продолжается до гомоморфизма $\varphi: T \rightarrow T_0$ группы T на группу T_0 (следует учесть, что отражения r_1 и r_2 порождают T_0).

Ядро Кер $\varphi = \Gamma$ и есть искомая группа. Отметим на будущее, что $\Gamma \cap T_0 = \{1\}$, поскольку на T_0 гомоморфизм φ действует тождественно.

2) Покажем, что никакие разные внутренние точки \mathcal{P}_0 не эквивалентны под действием группы Γ . Предположим, что это не так, и $\gamma(x) = y$ для пары внутренних точек $x \neq y$ и некоторого движения γ из Γ . Если точки x и y принадлежат одному треугольнику, то мы вступаем в противоречие с п. 3.2г). Если же они лежат в разных треугольниках, то с помощью движения t_0 из группы T_0 добьемся того, чтобы точки t_0x и y лежали внутри \mathcal{P}_0 в одном треугольнике. Но $(\gamma t_0^{-1})(t_0(x)) = y$. Снова принимая во внимание п. 3.2г), заключаем, что такое возможно, только если $t_0(x) = y$, а γt_0^{-1} элемент группы T , переводящий плитку \mathcal{P}_0 в себя (почему?) и оставляющий точку y на месте. Но такой элемент лежит в группе T_0 согласно п. 3.2в). Следовательно, группе T_0 принадлежит и элемент $\gamma \in \Gamma$. Так как $\Gamma \cap T_0 = \{1\}$, получаем $\gamma = 1$ и $x = y$. Противоречие.

3) Покажем, наконец, что в группе Γ есть элементы, отождествляющие противоположные стороны \mathcal{P}_0 , и что никаких «лишних» склеек точек границы \mathcal{P}_0 группа Γ не производит.

На этом этапе удобно изменить разметку сторон восьмиугольника \mathcal{P}_0 . А именно, стороны, попавшие в одну пару, обозначать одной и той же буквой алфавита, но один раз — строчной, а другой — прописной буквой. Такая разметка изображена на рис. 10.

Обозначим через a движение из группы Γ , равное композиции $r_3 R_3$ двух отражений из группы T . (Контрольный вопрос: почему a принадлежит группе Γ ?) Движение a переводит сторону A в сторону a в соответствии с правилом топологической склейки из п. 1.4, а плитку \mathcal{P}_0 — в плитку, смежную с ней по стороне a . Аналогично, $A = a^{-1} = R_3 r_3$ переводит \mathcal{P}_0 в плитку, смежную с ней по стороне A .

Аналогично определяются движения b, B, c, C, d, D из группы Γ .

Предположим, что группа Γ склеила две точки границы (см. рис. 10), т. е. $\gamma(x) = y$. При этом элемент γ не переводит плитку \mathcal{P}_0 в себя, так как

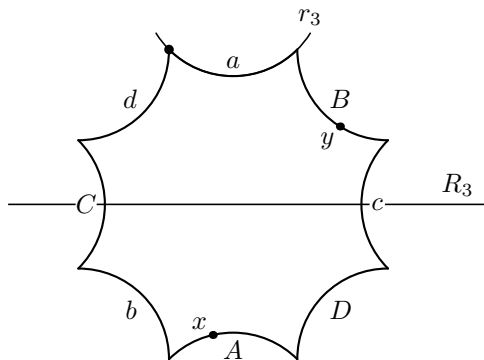


Рис. 10.

группа симметрий \mathcal{P}_0 есть T_0 . Следовательно, γ переводит плитку \mathcal{P}_0 в плитку, смежную с ней по стороне B . Тогда движение $B^{-1}\gamma$ лежит в Γ и переводит \mathcal{P}_0 в себя. Следовательно, $B^{-1}\gamma = 1$, т. е. $\gamma = B$, а точка x обязана лежать на стороне b .

Намеченная нами программа полностью выполнена.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что группа Γ действует на плоскости Лобачевского без неподвижных точек.

4. ОБРАЗУЮЩИЕ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУКСОВОЙ ГРУППЫ Γ

Напомним, что элементы, порождающие группу, называются ее образующими. Между образующими имеются, вообще говоря, соотношения. Множество соотношений называется определяющим, если любое другое соотношение есть их следствие (смотри статью А. А. Клячко [5] в этом номере).

Рассмотрим построенную в п. 3 фуксову группу Γ , которая геометрически склеивает поверхность рода 2 по выкройке $w = aBcDAbCd$.

ТЕОРЕМА. *Группа Γ порождается элементами a, b, c, d, A, B, C, D с единственным нетривиальным определяющим соотношением*

$$abcdABCD = 1.$$

(Тривиальные определяющие соотношения суть $aA = bB = cC = dD = 1$.)

4.1. Докажем, что группа Γ порождается движениями a, b, c, d, A, B, C, D , каждое из которых переводит плитку \mathcal{P}_0 в одну из смежных с ней плиток замощения.

Рассмотрим элемент $\gamma \in \Gamma$ и плитку $\gamma(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_\gamma$. Заметим, что есть ровно один элемент группы Γ с таким свойством, так как только единичный элемент группы Γ сохраняет плитку \mathcal{P}_0 . Соединим плитку \mathcal{P}_0 с плиткой \mathcal{P}_γ цепью плиток $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_\gamma)$, в которой плитки \mathcal{P}_{i-1} и \mathcal{P}_i смежны по стороне.

Покажем, что элемент γ можно представить в виде произведения преобразований a, b, c, d, A, B, C, D . Для этого воспользуемся тем, что плитка \mathcal{P}_0 отмечена циклическим словом w . Предположим, что в соседнюю плитку \mathcal{P}_1 мы переходим через сторону плитки \mathcal{P}_0 , отмеченную буквой B . Тогда $\mathcal{P}_1 = B(\mathcal{P}_0)$. Оказавшись в плитке \mathcal{P}_1 , напишем на только что пройденной стороне букву b , а на остальных сторонах — такие буквы, чтобы получилось (циклическое) слово w . Это можно сделать единственным образом. Общая сторона плиток \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 окажется отмеченной какой-то из наших букв. Пусть это будет буква c . Тогда $Bc(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_2$. Именно Bc , а не cB ,

как вам, быть может, показалось! Дело в том, что движение, переводящее плитку \mathcal{P}_1 в плитку \mathcal{P}_2 , лишь сопряжено c и равно BcB^{-1} .

Далее продолжаем по тому же правилу. Войдя в плитку \mathcal{P}_2 , напомним только что пройденной стороне букву C и восстановим циклическое слово w на плитке \mathcal{P}_2 . Если сторона, через которую предстоит пройти в \mathcal{P}_3 , оказалась отмеченной буквой A , то $BcA(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_3$.

Добравшись до плитки \mathcal{P}_γ , мы получим искомое представление γ в виде произведения элементов a, b, c, d, A, B, C, D .

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы изобразили аналогичный процесс на рисунке 11. Поскольку рисовать замощение плоскости Лобачевского восьмиугольниками тяжело, без ущерба для сути дела мы нарисовали замощение евклидовой

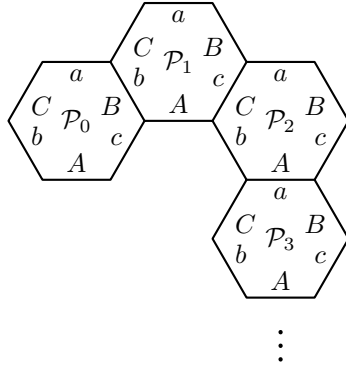


Рис. 11.

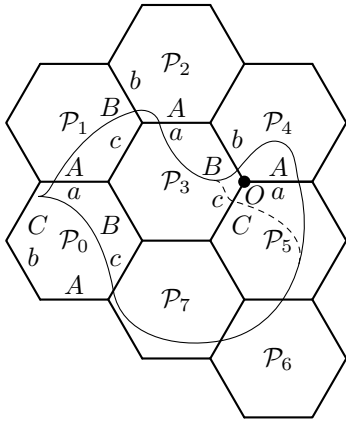
плоскости шестиугольными сотами, которые склеивают тор по выкройке $aBcAbC$. Группа склейки Γ в этом случае есть дискретная группа параллельных переносов плоскости на векторы решетки (подумайте, какие именно).

В процессе доказательства мы по каждой цепочке плиток построили слово, составленное из букв a, b, c, d, A, B, C, D . Ясно, что можно обратить эту конструкцию и построить по любому такому слову соответствующую цепочку плиток: если, например, наше слово равно $AbCca$, то по нему строится цепочка $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 = A(\mathcal{P}_0), \mathcal{P}_2 = Ab(\mathcal{P}_0), \mathcal{P}_3 = AbC(\mathcal{P}_0), \mathcal{P}_4 = AbCc(\mathcal{P}_0) = Ab(\mathcal{P}_0), \mathcal{P}_5 = AbCca(\mathcal{P}_0)$.

4.2. Переходим к определяющим соотношениям. Любое соотношение в группе Γ имеет вид

$$\omega = 1,$$

где в левой части записано слово в алфавите $\{a, b, c, d, A, B, C, D\}$. Согласно п. 4.1 такое слово ω определяет цепочку плиток, которая начинается



Случай замощения евклидовой плоскости шестиугольниками. Соотношение (а, точнее, цепочку плиток $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_0$) мы «снимаем с гвоздя» O , заменяя фрагмент $\dots BA \dots$ на $\dots c \dots$, используя соотношения обхода $BAC = 1$ или $BA = c$.

Рис. 12.

и заканчивается плиткой \mathcal{P}_0 . Такую цепь назовем циклом (см. рис. 12). Можно считать, что в слове ω не встречаются фрагменты Aa или aA . Это равносильно тому, что в соответствующей цепочке плиток отсутствуют фрагменты вида $\mathcal{P}\mathcal{P}'\mathcal{P}$, которые естественно назвать возвращениями.

Каждое соотношение приводит к циклу плиток, и, наоборот, с каждым циклом связано соотношение. В замощении имеются естественные циклы, образованные обходами вокруг вершины замощения. Все вершины замощения эквивалентны при действии группы Γ (почему?). Следовательно, все соотношения обхода равносильны.

Легко проверить, используя правило разметки плиток из п. 4.1, что соотношение обхода вершины плитки \mathcal{P}_0 , отмеченной черной точкой на рис. 10, выглядит так:

$$abcdABCD = 1.$$

Покажем, что соотношение обхода является определяющим. Идея доказательства проста и восходит, по-видимому, к Г. М. Кокстеру: на рисунке 12 изображена петля, проходящая через цикл плиток без возвращений, соответствующий некоторому соотношению в группе Γ . Вершины замощения, попавшие внутрь петли, Кокстер называл «гвоздями». Гвозди мешают «стянуть» наш цикл в цикл $\mathcal{P}_0\mathcal{P}_0$, который отвечает пустому слову.

Рисунок 12 учит нас, что соотношение обхода вокруг «гвоздя» O позволяет снять цикл $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7)$ с гвоздя O , заменив его циклом $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_5, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7)$.

Последовательное применение операции «снятия с гвоздя» с помощью соотношений обхода приводит нас к цели: слово, отвечающее начальному циклу, приводится к пустому слову с помощью соотношений обхода.

На этом доказательство теоремы об образующих и определяющих соотношениях группы Γ заканчивается.

5. ОТМЕЧЕННЫЕ ФУКСОВЫ ГРУППЫ РОДА 2

5.1. В предыдущем разделе мы построили такую фуксову группу Γ , что

- а) группа Γ действует на плоскости Лобачевского Λ^2 без неподвижных точек;
- б) факторпространство Λ^2/Γ гомеоморфно поверхности рода 2 (аналогичное построение имеет место и для любого рода $g > 1$).

Назовем такую группу фуксовой группой рода 2. В нашем построении фуксова группа рода 2 появилась не одна, а вместе с фундаментальным правильным гиперболическим восьмиугольником \mathcal{P} с суммой внутренних углов, равной 2π , стороны которого отмечены по образцу $w = aBcDAbCd$ рисунка 10.

Такого сорта отмеченные многоугольники (обязательно несамопересекающиеся, но уже не обязательно правильные и не обязательно выпуклые!) играют заметную роль в жизни фуксовых групп, а потому мы дадим им имя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперболический восьмиугольник без самопересечений с суммой внутренних углов, равной 2π , стороны которого отмечены по образцу $w = aBcDAbCd$, назовем *каноническим фундаментальным восьмиугольником* (или канонической геометрической выкройкой).

Напомним также, что одинаковой буквой (прописной и строчной) отмечаются равные стороны. Более того, следуя одной идее Алисы²⁾ B одновременно обозначает и то единственное сохраняющее ориентацию движение плоскости, которое сторону b переводит в сторону B .

5.2. А. Пуанкаре доказал, что любой канонический восьмиугольник ($4g$ -угольник) служит фундаментальной областью фуксовой группы Γ рода 2 (рода $g > 1$). Группа Γ порождается элементами a, b, c, d с единственным определяющим соотношением $abcdABCD = 1$ (или $abcd = dcba$).

Верно и обратное утверждение: для любой фуксовой группы рода 2 существует фундаментальный канонический восьмиугольник. Попробуем это объяснить.

5.3. Пусть Γ — фуксова группа рода 2. Зафиксируем точку $y_0 \in \Lambda^2$ и рассмотрим множество \mathcal{F} таких точек y , что $\rho(y, y_0) \leq \rho(\gamma y, y_0)$ для любого $\gamma \in \Gamma$ (здесь ρ — расстояние на плоскости Лобачевского).

²⁾ «собака по имени Собака» Просто и удобно.

Несложно показать (но мы этого делать не будем), что множество \mathcal{F} является выпуклым (а потому простым) гиперболическим фундаментальным многоугольником для группы Γ (так называемый фундаментальный многоугольник Вороного – Дирихле). Таким образом мы обзаводимся геометрической выкройкой поверхности рода 2 в виде несамопересекающегося многоугольника. Так как группа Γ действует на плоскости Λ^2 без неподвижных точек, то выкройка Вороного – Дирихле \mathcal{F} не содержит двух смежных сторон, отмеченных одной и той же буквой (почему?). Как объяснялось в разделе 2, выкройку \mathcal{F} с помощью элементарных топологических преобразований можно сделать сначала удобной, а затем — канонической. Заменяя на каждом шаге этой цепочки гомеоморфизм склейки сторон на движение из группы Γ , отождествляющее эти стороны, мы получим в конце цепочки канонический восьмиугольник. В самом деле, каждое геометрическое элементарное преобразование приводит к новому фундаментальному многоугольнику для группы Γ . Отсюда следует, что после каждого шага у нас должен получаться многоугольник \mathcal{P} без самопересечений.

5.4. Назовем пару (Γ, \mathcal{P}) , состоящую из фуксовой группы рода 2 и ее фундаментального канонического восьмиугольника \mathcal{P} , *геометрически отмеченной фуксовой группой рода 2*. В множестве геометрически отмеченных фуксовых групп рода 2 введем отношение эквивалентности, объявив пары (Γ, \mathcal{P}) и $(\Gamma_1, \mathcal{P}_1)$ эквивалентными, если существует такое сохраняющее ориентацию движение плоскости t , что

а) $\Gamma_1 = t\Gamma t^{-1}$;

б) t переводит отмеченный восьмиугольник \mathcal{P} в отмеченный восьмиугольник \mathcal{P}_1 .

Фактормножество или множество классов эквивалентных пар обозначим через $Q(2)$. С другой стороны, обозначим через $\mathcal{P}(2)$ множество канонических восьмиугольников, рассматриваемых с точностью до их равенства как отмеченных.

Тонкая теорема Пуанкаре и рассмотрения п. 5.3 говорят нам о том, что множества $Q(2)$ и $\mathcal{P}(2)$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Множество $\mathcal{P}(2)$ можно превратить в топологическое пространство с естественной топологией геометрической сходимости восьмиугольников.

Как устроено пространство $Q(2)$ в окрестности любой своей точки $(\Gamma_0, \mathcal{P}_0)$? Очевидно, что оно состоит из классов фуксовых групп, канонические многоугольники которых можно получить «малым шевелением» вершин многоугольника \mathcal{P}_0 . Важно заметить, что

а) многоугольники, полученные из \mathcal{P}_0 «малым шевелением» его вершин, остаются несамопересекающимися;

- б) канонический многоугольник \mathcal{P} однозначно восстанавливается по любой своей вершине x с помощью движений из группы Γ так, как это изображено на рис. 13.

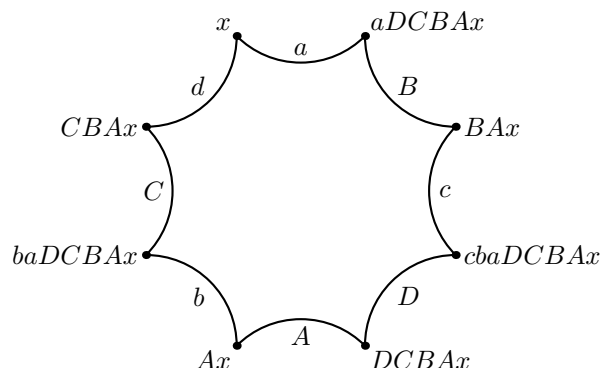


Рис. 13.

Следующий эвристический метод подсчета параметров может быть сделан строгим и дает правильное представление о запасе отмеченных фуксовых групп рода 2.

Каждая вершина многоугольника \mathcal{P} зависит от двух параметров (положение точки на гиперболической плоскости). Получается 16 параметров для «шевеления». Но между ними имеется пять зависимостей: ведь нужно позаботиться о том, чтобы полученный многоугольник был каноническим, т. е. обеспечить равенство противоположных сторон и добиться того, чтобы сумма внутренних углов была равна 2π . Итого $4 + 1 = 5!$ Если еще учесть группу движений плоскости Лобачевского, которая зависит от 3 параметров, то у нас остается восемь ($16 - 5 - 3 = 8$) независимых параметров.

А как теперь узнать, от скольких параметров зависит пространство «чистых» (не отмеченных каноническим многоугольником \mathcal{P}) фуксовых групп рода 2? Для этого нужно учесть следующее обстоятельство: давайте пошевелим вершину x многоугольника \mathcal{P}_0 , а затем построим с помощью новой точки x' и старых движений ($a_0, b_0, c_0, d_0, A_0, B_0, C_0, D_0$) из группы Γ_0 новый канонический многоугольник \mathcal{P}' ровно так, как это сделано на рис. 13. Ясно, что при этом \mathcal{P}' окажется каноническим многоугольником той же фуксовой группы Γ_0 . Поэтому при таких «шевелениях» мы не получим новой точки в пространстве фуксовых групп. Отсюда следует, что пространство фуксовых групп рода 2 зависит от $8 - 2 = 6$ вещественных параметров (для рода g — от $(6g - 6)$ параметров).

Строгое и изящное геометрическое изложение этого круга вопросов заинтересованный читатель сможет найти в статье С. М. Натансона [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. *Наглядная топология* (под редакцией С. П. Новикова). М.: Наука, 1982.
- [2] Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. *Введение в топологию*. Изд. 2е. М.: Наука. Физматлит, 1995.
- [3] Э. Б. Винберг. *Калейдоскопы и группы отражений* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 7, 2003. С. 45–63.
- [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения* (гл. 4, §20). М.: Наука, 1979.
- [5] А. А. Клячко *Комбинаторная теория групп и геометрия* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 13, 2009. С. 18–32.
- [6] С. М. Натанзон. *Инвариантные прямые фуксовых групп* // УМН, 1972. Т. 27, №4. С. 145–160.
- [7] Г. Зейферт, В. Трельфалль. *Топология*. Изд 2е. М.; Ижевск: РХД, 2001.
- [8] Ч. Коснёвски. *Начальный курс алгебраической топологии* (глава 11). М.: Мир, 1983.
- [9] С. Г. Смирнов. *Прогулки по замкнутым поверхностям*. М.: МЦНМО, 2003.
- [10] H.S.M. Coxeter. *Discrete groups generated by reflections* // Ann. Math., 1934. Vol. 35, no 3. P. 588–621.