Теорема Лиувилля для субгармонических функций на $\mathbb{Z}^2$

Н. Николов

Теорема Лиувилля утверждает, что каждая ограниченная (снизу или сверху) гармоническая функция на $\mathbb{R}^n$ является константой. Кроме того, каждая ограниченная сверху субгармоническая функция на $\mathbb{R}^2$ является константой. Этот результат неверен для $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$.

Эти утверждения имеют дискретные аналоги (см. напр. [3, 4]). В этой заметке мы рассмотрим дискретные аналоги субгармонических функций.

Пусть $\mathbb{Z}^2$ — множество пар целых чисел. Далее мы при необходимости отождествляем пару $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ с гауссовым числом $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Функция $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ называется *субгармонической*, если для каждой пары $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$0 \leqslant 4\Delta_{\mathbb{Z}^2} f(z) := f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y).$$

Утверждение 1. *Каждая ограниченная сверху субгармоническая функция $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ является константой.*

Доказательство. Для функции $g(z) = \ln(|z|^2 - 1)$ нетрудно проверить, что $\Delta_{\mathbb{Z}^2} g(z) < 0$ для $|z| > 2$. Эту функцию легко можно доопределить на всём $\mathbb{Z}^2$ так, чтобы $\Delta_{\mathbb{Z}^2} g(z) < 0$ для $z \neq 0$ (например, $g(0) = \ln a$ и $g(z) = \ln b$ для $|z| = 1$, где $0 < 3a < b^4$ и $0 < 4b < 1$).

Для $\varepsilon > 0$ положим $f_\varepsilon = f - \varepsilon g$. Так как $\lim_{z\to\infty} f_\varepsilon(z) = -\infty$, то f_ε имеет максимум M_ε. Если $z \neq 0$, то из $\Delta_{\mathbb{Z}^2} f_\varepsilon(z) > 0$ вытекает, что $f_\varepsilon(z) < M_\varepsilon$. Значит, $f_\varepsilon(0) = M_\varepsilon$ и отсюда $f(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = M := \sup f$. Тогда из $\Delta_{\mathbb{Z}^2} f(z) \geqslant 0$ следует, что $f(z) = M$ для каждого из четырёх соседей 0. Продолжая таким образом, заключаем, что $f(z) = M$ для всех z. $\square$

Аналогично $\mathbb{Z}^2$, можно определить понятие субгармонической функции на $\mathbb{Z}^n$ и оператора Лапласа $\Delta_{\mathbb{Z}^n}$. Предоставляем читателю доказать, что утверждение 1 справедливо и для $\mathbb{Z}$ (см. ниже для более общего случая). С другой стороны, для $n \geqslant 3$ существует единственная функция (Грина) $g_n\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$\text{(i) } \Delta_{\mathbb{Z}^n} g_n(0) = 1; \quad \text{(ii) } \Delta_{\mathbb{Z}^n} g_n(z) = 0 \text{ при } z \neq 0; \quad \text{(iii) } \lim_{z\to\infty} g_n(z) = 0.$$

Единственность легко следует из принципа максимума, а существование доказывается при помощи формулы Фурье (см. напр. [5] для $n = 3$):

$$g_n(z) = \frac{n}{\pi^n} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{\sum_{k=1}^n \cos(zx_k)}{\sum_{k=1}^n \cos x_k - n} \, dx_1 \dots dx_n$$

(интеграл сходится только при $n \geqslant 3$).

Следовательно, утверждение 1 неверно для $\mathbb{Z}^n$ при $n \geqslant 3$. Тогда из доказательства утверждения 1 вытекает

Следствие. *Если $n \geqslant 3$ и $k > 0$, то не существует такой функции $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, что $\Delta_{\mathbb{Z}^n} f(z) \geqslant 0$ для $|z| > k$ и $\lim_{z\to\infty} f(z) = -\infty$.*

Теперь рассмотрим так называемые F-субгармонические функции на $\mathbb{Z}^n$ при $n = 1, 2$.

Пусть $F\colon \mathbb{Z} \to [0, 1)$ — такая неотрицательная функция, что $\mathcal{F} = \{k \in \mathbb{Z} : F(k) > 0\}$ — конечное множество, состоящее из попарно взаимно простых чисел, $\sum_{k\in\mathcal{F}} F(k) = 1$ и $\sum_{k\in\mathcal{F}} kF(k) = 0$. Будем говорить, что f является F-субгармонической функцией на $\mathbb{Z}$, если для каждого $z \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$f(z) \leqslant \sum_{k\in\mathcal{F}} F(k) f(z + k).$$

Отметим, что это неравенство справедливо для каждой субгармонической функции f в $\mathbb{Z}$ (т. е. такой функции, что $2f(z) \leqslant f(z+1)+f(z-1)$), так как нетрудно показать, что субгармоническая функция на $\mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенству Йенсена и даже неравенству Фукса — см. [1] для выпуклых функций в интервале).

Далее, пусть $F\colon \mathbb{Z}^2 \to [0, 1)$ — такая неотрицательная функция, что $\mathcal{F} = \{a \in \mathbb{Z}^2 : F(a) > 0\}$ — конечное множество, для которого выполнены следующие свойства:

(i) $\sum_{a\in\mathcal{F}} F(a) = 1$;

(ii) если $a \in \mathcal{F}$, то $-a \in \mathcal{F}$ и $ia \in \mathcal{F}$;

(iii) множество $\mathcal{F} \cap \{\operatorname{Im} z = 0\}$ непусто и состоит из попарно взаимно простых чисел.

Будем говорить, что f является F-субгармонической функций на $\mathbb{Z}^2$, если для каждого $z \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$f(z) \leqslant \sum_{a\in\mathcal{F}} F(a) f(z + a).$$

Следующее утверждение есть обобщение как утверждения 1, так и результата из [2].

Утверждение 2. *а) Каждая F-субгармоническая функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, для которой*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{f(z)}{|z|} \leqslant 0,$$

является константой.

б) Каждая F-субгармоническая функция $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, для которой

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{f(z)}{\ln|z|} \leqslant 0,$$

является константой.

Доказательство. а) Так как $2|z| = |z-w| + |z+w|$ при $|z| \geqslant |w|$, то $|z|$ является F-(суб)гармонической функций при $|t| \geqslant m = \max_{w\in\mathcal{F}} w$. Тогда аналогично доказательству утверждения 1 можно показать, что $\max_{[-m+1,m-1]} f = \sup f$. Если $f(z) = M$, по индукции получаем, что $f(z + \sum_{w\in\mathcal{F}} k_w w) = M$, где $k_w \in \mathbb{Z}^+$. Сумма в скобках принимает все целые значения, так как среди чисел $w \in \mathcal{F}$ есть хотя бы два числа противоположного знака и они взаимно просты по определению множества $\mathcal{F}$. Следовательно, $f = M$.

б) Доказательство аналогичное и основано на том, что функция $g(z) = -\ln(|z|^2 - 4m^2)$ (строго) F-субгармоническая при $|z|^2 \geqslant 56m^2$. Это следует из неравенства

$$4g(z) < g(z+z_1) + g(z-z_1) + g(z+z_2) + g(z-z_2),$$

где $z_1 = (a-b, b)$, $z_2 = iz_1 = (-b, a-b)$ и $0 \leqslant b \leqslant a \leqslant m$. После несложных преобразований неравенство принимает вид

$$c^2(r-d)^2 + 2cd(r-d+c)^2 > 8((a-b)x+by)^2(-bx+(a-b)y)^2,$$

где $r = |z|^2$, $d = 4m^2$ и $c = (a-b)^2 + b^2$. Правая сторона последнего неравенства не больше, чем $8c^2r^2$, следовательно, достаточно доказать, что

$$c(r-d)^2 + 2d(r-d+c)^2 > 8cr^2.$$

Это неравенство эквивалентно

$$r[r(2d-7c) - 2d(2d-c)] + d[2(d-c)^2 + cd] > 0.$$

Последнее очевидно, так как выражение в первых скобках неотрицательно в силу неравенств $r \geqslant 14d$ и $7(2d-7c) \geqslant 2d - c > 0$ (т. е. $d \geqslant 4c$).

Замечание. Результаты оптимальные, как показывают примеры функций $\varepsilon|z|\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ и $\varepsilon\ln(|z|^2+1)\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, где $\varepsilon > 0$.

Список литературы

[1] Храбров А. И. *Вокруг монгольского неравенства* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 7. 2003. С. 149–162.

[2] Богданов И. И., Челноков Г. Р. *Обобщенные супергармонические последовательности* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 10. 2006. С. 232–235.

[3] Шольце П. *О неотрицательных гармонические последовательности на решетке* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 10. 2006. С. 236–242.

[4] Слободник С. Г. *Дискретные положительные гармонические функции* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2007. С. 145–148.

[5] Duffin R. J. *Discrete potential theory* // Duke Math. J. V. 20, no 2, 1953. P. 233–251.

Николай Николов, Институт математики и информатики, Болгарская академия наук
email: `nik@math.bas.bg`